



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII

Ion ACHIRI
Vasile NEAGU

Vasile CIOBANU
Nicolae PRODAN

Petru EFROS
Dumitru TARAGAN

Valentin GARIT
Anatol TOPALĂ

MATEMATICĂ

Leonhard Euler (1707-1783)

MANUAL
XI
PENTRU
CLASA

EDITURA
PRUT



MINISTERUL EDUCAȚIEI, CULTURII ȘI CERCETĂRII

Ion ACHIRI
Vasile NEAGU

Vasile CIOBANU
Nicolae PRODAN

Petru EFROS
Dumitru TARAGAN

Valentin GARIT
Anatol TOPALĂ

MATEMATICĂ



Acest manual este proprietatea Ministerului Educației, Culturii și Cercetării.

Manualul școlar a fost realizat în conformitate cu prevederile curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Culturii și Cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Culturii și Cercetării nr. 1219 din 06 noiembrie 2020, ca urmare a evaluării calității metodică-științifice.

Denumirea instituției de învățământ _____ Acest manual a fost folosit:				
Anul de folosire	Numele și prenumele elevului	Anul școlar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

- Dirigințele clasei verifică dacă numele, prenumele elevului sunt scrise corect.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
- Aspectul manualului (la primire și la returnare) se va aprecia cu unul dintre următorii termeni: *nou, bun, satisfăcător, nesatisfăcător*.

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii Prut Internațional.

Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din această carte este permisă doar cu acordul scris al editurii.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IȘE (Modulul 4)

Vasile Ciobanu, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulul 1)

Petru Efros, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 8–10)

Valentin Garit, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 8–10)

Vasile Neagu, doctor habilitat, profesor universitar, USM (Modulele 3, 5)

Nicolae Prodan, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 6, 7)

Dumitru Taragan, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulul 2)

Anatol Topală, doctor, conferențiar universitar, USM (Modulele 6, 7)

Comisia de evaluare: *Ludmila Baș*, grad didactic superior, LT „Constantin Stere”, Soroca – coordonator

Aliona Lașcu, grad didactic superior, LT „Mihai Eminescu”, Chișinău

Gabriela Diaciuc, grad didactic superior, LT „Alexandr Pușkin”, Fălești

Radion Blându, grad didactic superior, LT „Spiru Haret”, Chișinău

Andrei Corlat, doctor, conferențiar universitar, UTM

Redactor: *Tatiana Rusu*

Corector: *Nina Artin*

Copertă: *Sergiu Stanciu*

Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

© Editura Prut Internațional, 2020

© I. Achiri, V. Ciobanu, P. Efros, V. Garit, V. Neagu, N. Prodan, D. Taragan, A. Topală, 2020

Editura Prut Internațional, str. Alba Iulia 23, bl. 1 A, Chișinău, MD-2051

Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18; e-mail: office@prut.ro; www.edituraprut.md

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Matematică: Manual pentru clasa a 11-a / Ion Achiri, Vasile Ciobanu, Petru Efros, Valentin Garit, Vasile Neagu, Nicolae Prodan, Dumitru Taragan, Anatol Topală; comisia de evaluare: Ludmila Baș (coordonator) [et al.]; Ministerul Educației, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. – Chișinău: Prut Internațional. – 304 p.

ISBN 978-9975-54-514-3

51(075.3)

M 47

Imprimit la Tipografia Unisoft

Cuvânt-înainte

Prezentul manual este elaborat conform curriculumului liceal la matematică, ediția 2019, axat pe formarea de competențe.

Manualul este structurat pe module. Pentru orientare, la începutul fiecărui modul sunt formulate obiectivele educaționale care pot fi atinse studiind modulul respectiv. Obiectivele marcate cu * vizează numai elevii de la profilul real. Menționăm că manualul conține compartimente ce țin de elemente de analiză matematică, numere complexe, elemente de algebră superioară și geometrie.

La această treaptă a școlarizării, elevii se familiarizează cu o serie de concepte noi. Acest fapt este un motiv în plus de a parcurge atent atât materialul teoretic (definiții, teoreme, proprietăți etc.), cât și exemplele ilustrative, exercițiile motivaționale și cele rezolvate. Numai în acest mod pot fi realizate prevederile principiilor constructiv și formativ puse la baza studierii matematicii în învățământul preuniversitar.

Manualul este structurat astfel încât să poată fi utilizat la predarea matematicii atât elevilor de la profilul real, cât și celor de la profilurile umanist, arte, sport. De reținut că **materialul (textul) marcat în partea stângă cu o bară verticală este prevăzut numai pentru profilul real. Pentru profilurile umanist, arte, sport aceste texte pot fi propuse ca extinderi.** În plus, în conformitate cu obiectivele preconizate, exercițiile și problemele propuse la sfârșitul paragrafului, precum și la sfârșitul modulului sunt clasificate după profil^{*)}. Exercițiile marcate cu * au un grad sporit de complexitate și nu sunt obligatorii pentru rezolvare la profilul respectiv.

Testele sumative servesc la verificarea nivelului performanțelor atinse și sunt elaborate pe profiluri.

Unele prevederi țin să faciliteze organizarea lucrului individual al elevilor. În afară de exemplele motivaționale, de consolidare și de utilizare a conceptelor, în manual sunt prezentate modele de rezolvare a principalelor tipuri de exerciții și probleme.

^{*)} La fiecare profil, exercițiile și problemele sunt clasificate pe niveluri:

- a) profilurile umanist, arte, sport: **A** – cunoaștere și înțelegere, **B** – aplicare, **C** – integrare;
- b) profilul real: **A₁** – cunoaștere și înțelegere, **B₁** – aplicare, **C₁** – integrare.

Simbolurile și notațiile folosite sunt cele întâlnite frecvent în literatura de specialitate și recomandate inclusiv de curriculumul gimnazial la matematică, ediția 2019. Sunt folosite literele alfabetului grec, pe care-l reproducem mai jos.

Manualul oferă elevilor pasionați de matematică posibilități pentru a-și extinde cunoștințele, atât prin însușirea unor noțiuni teoretice suplimentare (opționale), cât și prin rezolvarea unor probleme mai complicate.

Stimați profesori și dragi elevi, sperăm ca acest manual să devină un instrument didactic util în studierea matematicii. Totodată vom fi recunoscători pentru obiecțiile și sugestiile dumneavoastră ce vor contribui la îmbunătățirea conținutului manualului.

Autorii

Alfabetul grec

Litere	Citirea literelor	Litere	Citirea literelor
A α	alfa	N ν	niu
B β	beta	Ξ ξ	csi
Γ γ	gama	O o	omicron
Δ δ	delta	Π π	pi
E ε	epsilon	P ρ	ro
Z ζ	zeta	Σ σ	sigma
H η	eta	T τ	tau
Θ θ	teta	Y υ	ipsilon
I ι	iota	Φ φ	fi
K κ	kapa	X χ	hi
Λ λ	lambda	Ψ ψ	psi
M μ	miu	Ω ω	omega

Obiective

- ⇒ operarea cu numere reale pentru a efectua calcule în diverse contexte;
- ⇒ reprezentarea prin diverse moduri a șirurilor, progresiilor aritmetice și geometrice;
- ⇒ clasificarea după diverse criterii a șirurilor numerice;
- ⇒ aplicarea șirurilor, progresiilor aritmetice și geometrice în diverse contexte;
- ⇒ *utilizarea în diverse contexte a noțiunii de limită a șirului, a șirurilor convergente, divergente.

În modulele 1–5 vom studia elemente de analiză matematică – unul dintre compartimentele fundamentale ale matematicii. Aplicații ale analizei matematice întâlnim în fizică, tehnică, geometrie, economie și în multe alte domenii. Cadrul numeric al analizei matematice îl constituie mulțimea numerelor reale. Obiectele ei de studiu – dependențele funcționale, derivatele, integralele – sunt, în fond, limite definite în mod corespunzător. Pentru a studia limitele de funcții, este necesar să examinăm limitele de șiruri numerice.

§1 Șiruri numerice. Recapitulare și completări

1.1. Marginile inferioare și superioare ale mulțimilor de numere reale

Vom studia unele proprietăți ale mulțimilor de numere reale necesare pentru fundamentarea studiului analizei matematice.

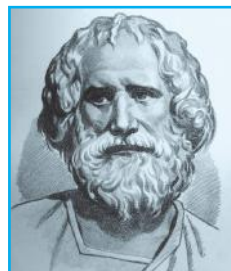
Axioma continuității mulțimii numerelor reale

Fie A și B două submulțimi nevide ale mulțimii $\mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$ are loc relația $a \leq b$. Atunci există cel puțin un $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \leq c \leq b$.

Principiul lui Arhimede¹

Pentru orice număr real x există un unic număr întreg m , astfel încât $m \leq x < m + 1$.

Numărul m se numește *partea întreagă* a numărului x și se notează $[x]$.



Arhimede din Siracuza

¹ Arhimede din Siracuza (cca 287–212 î.H.) – învățat grec.

Definiții. • Mulțimea $X \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită superior (mărginită inferior)** dacă există un număr $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \leq c$ ($x \geq c$), pentru orice $x \in X$.

Numărul c se numește **majorant (minorant)** pentru mulțimea X .

• Mulțimea $X \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită** dacă ea este mărginită superior și inferior, adică există numerele reale m, M , astfel încât $m \leq x \leq M$, pentru orice $x \in X$.

Pentru fiecare dintre aceste propoziții poate fi formulată negația ei logică. De exemplu, negația primei propoziții este: mulțimea $X \subset \mathbb{R}$ nu este mărginită superior (mărginită inferior) dacă pentru orice $m \in \mathbb{R}$ există $x' \in X$, astfel încât $x' > m$ ($x' < m$). (Cu ajutorul cuantificatorilor universali $\forall, \exists$ condiția „pentru orice [oricare ar fi] $m \in \mathbb{R}$ există $x' \in X$ ” se scrie concis astfel: $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x' \in X$.)

Observație. Orice mulțime $X \subset \mathbb{R}$, mărginită superior (mărginită inferior), are o infinitate de majoranți (minoranți). Dacă numărul c este un majorant (minorant) pentru mulțimea X , atunci oricare alt număr c_1 mai mare (mai mic) decât c de asemenea este un majorant (minorant) pentru mulțimea X . Într-adevăr, pentru orice $x \in X$, astfel încât $x \leq c$ și $c < c_1$, rezultă că $x \leq c_1$, deci c_1 este de asemenea un majorant.

Definiție. Elementul $a \in X$ (dacă există), $X \subset \mathbb{R}$, se numește **cel mai mare** (respectiv **cel mai mic**) element al mulțimii X dacă pentru orice $x \in X$ avem $x \leq a$ (respectiv $x \geq a$). În acest caz, se notează: $a = \max X$ ($a = \min X$).

Exemplu

Pentru mulțimea $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$, $\max A = 1$, iar $\min A$ nu există.

Definiții. • Cel mai mic majorant (dacă există) al mulțimii mărginite superior $X \subset \mathbb{R}$ se numește **margine superioară (supremum)** pentru X și se notează $\sup X$.

• Cel mai mare minorant (dacă există) al mulțimii mărginite inferior $X \subset \mathbb{R}$ se numește **margine inferioară (infimum)** pentru X și se notează $\inf X$.

Observație. Fie $\alpha = \inf X$ și $\beta = \sup X$, iar $Y = \{-x \mid x \in X\}$, atunci $\inf Y = -\beta$ și $\sup Y = -\alpha$.

Exemple

1. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ nu este mărginită superior, dar este mărginită inferior. Prin urmare, mulțimea $\mathbb{N}$ nu este mărginită. Mulțimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ nu sunt mărginite nici inferior, nici superior.

2. Mulțimea $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ este mărginită, deoarece $\forall n \geq 1$ avem $0 < \frac{1}{n} \leq 1$.

3. Mulțimea $A = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$ este mărginită, deoarece $-1 \leq \sin x \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Observație. În exemplul 2, $\inf X = 0 \notin X$, $\sup X = 1 \in X$, iar în exemplul 3, $\inf A = -1 \in A$, $\sup A = 1 \in A$. Așadar, supremumul (infimumul) unei mulțimi $X \subset \mathbb{R}$ poate să aparțină sau poate să nu aparțină acestei mulțimi.

O mulțime nevidă mărginită superior are o infinitate de majoranți, iar supremumul ei este cel mai mic majorant. Cum o mulțime infinită de numere poate să nu aibă cel mai mic element (a se vedea exemplul 2), apare următoarea întrebare: o mulțime numerică nevidă mărginită superior (inferior) posedă oare supremum (infimum)?

Teorema 1. Orice mulțime numerică nevidă mărginită superior (inferior) posedă margine superioară (inferioară) și această margine este unică.

Teorema 2 (de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi)

Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă mărginită superior. Numărul M^* este marginea superioară a mulțimii X dacă și numai dacă:

- 1) $x \leq M^*$, pentru orice $x \in X$;
- 2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încât $x_\varepsilon > M^* - \varepsilon$.

Teorema 3 (de caracterizare a marginii inferioare a unei mulțimi)

Fie $X \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă mărginită inferior. Numărul m^* este marginea inferioară a mulțimii X dacă și numai dacă:

- 1) $x \geq m^*$, pentru orice $x \in X$;
- 2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in X$, astfel încât $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$.

Demonstrația acestor teoreme rezultă imediat din definiția marginii superioare și respectiv a celei inferioare pentru o mulțime.

Dacă mulțimea X nu este mărginită superior (inferior), atunci vom conveni să scriem $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$). Pentru $X = \mathbb{R}$, convenim că $\inf \mathbb{R} = -\infty$ și $\sup \mathbb{R} = +\infty$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, considerăm că $-\infty < x < +\infty$.

Exerciții rezolvate

❖ 1. Să se determine supremumul și infimumul mulțimii $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Rezolvare:

Evident că $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci, mulțimea A este mărginită.

Să demonstrăm că $\sup A = 1$. Vom aplica teorema de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi. Deoarece $1 - \frac{1}{n} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că prima condiție a teoremei 2 este verificată.

Observăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ inecuația $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ are soluții în $\mathbb{N}^*$. Fie n_ε una dintre aceste soluții. Obținem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul $1 - \frac{1}{n_\varepsilon} \in A$, astfel încât $1 - \frac{1}{n_\varepsilon} > 1 - \varepsilon$. Așadar, condiția a doua a teoremei 2 este verificată. Prin urmare, $\sup A = 1$.

Să demonstrăm că $\inf A = 0$. Avem $1 - \frac{1}{n} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum 0 aparține acestei mulțimi (pentru $n = 1$), rezultă că $\inf A = 0$. Constatăm că $\inf A = \min A \in A$, iar $\sup A \notin A$.

2. Fie mulțimea $A = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

- Să se demonstreze că mulțimea A este mărginită.
- Să se determine supremul și infimumul mulțimii A .

Rezolvare:

a) Observăm că $0 \leq \frac{n^2}{n^2 + 4} < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci, mulțimea A este mărginită.

b) Să demonstrăm că $\sup A = 1$. Vom aplica teorema 2. Prima condiție a teoremei este verificată. Vom arăta că pentru orice $0 < \varepsilon < 1$ inecuația $\frac{n^2}{n^2 + 4} > 1 - \varepsilon$ are soluții în $\mathbb{N}$.

Rezolvând această inecuație, obținem $n > 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ și, conform principiului lui Arhimede,

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $n_\varepsilon > 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, anume $n_\varepsilon = \left\lceil 2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\rceil + 1$. Prin urmare, $\sup A = 1$.

Deoarece $\frac{n^2}{n^2 + 4} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și $0 \in A$, rezultă că $\inf A = 0$.

Observație. Mulțimea tuturor fracțiilor subunitare pozitive nu posedă nici cel mai mic element, nici cel mai mare element, infimumul și supremul acestei mulțimi fiind respectiv numerele 0 și 1.

1.2. Noțiunea de șir numeric. Șiruri finite, infinite

Definiție. Fie $E \subset \mathbb{R}$ o submulțime. Se numește **șir de numere reale (șir numeric, șir real)** orice funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow E$.

O astfel de funcție asociază fiecărui număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ un unic număr real $f(n) \in E$.

Dacă funcția f este definită pe o submulțime finită a elementelor consecutive ale mulțimii $\mathbb{N}^*$, atunci se obține un **șir numeric finit**. În caz contrar, șirul obținut se numește **șir numeric infinit**.

Numărul $f(n)$ se notează cu x_n și se numește **termenul de rang n** al șirului sau **termenul general** al șirului, iar însuși șirul se notează cu $(x_n)_{n \geq 1}$.

Observații. 1. Uneori, funcția f este definită pe $\mathbb{N}$ și atunci șirul începe cu termenul de rang zero, adică scriem $(x_n)_{n \geq 0}$, sau funcția este definită pe $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, k-1\}$, atunci scriem $(x_n)_{n \geq k}$.

2. În mod frecvent, pentru șiruri utilizăm și notații ca $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $(c_n)_{n \geq 1}$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, $(\beta_n)_{n \geq 1}$ etc.

Exemple

1. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$, reprezintă șirul inverselor numerelor naturale nenule.

2. Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = n$, este șirul numerelor naturale.

3. Șirul $(b_n)_{n \geq 2}$, $b_n = \sqrt{n-2}$, este șirul $0, 1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n-2}, \dots$

Șirul se consideră definit dacă este indicat modul de obținere a termenilor săi.

Un șir poate fi definit:

1) *analitic*, adică prin **formula termenului general**

Această formulă permite calculul oricărui termen al șirului.

De exemplu, pentru șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin termenul general $x_n = 1 + (-1)^n$, avem $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2, \dots$

2) *prin descrierea termenilor șirului*

De exemplu, șirul numerelor prime este 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

3) *printr-o relație de recurență*. În acest caz se precizează unul sau câțiva termeni și o relație de recurență din care se deduc ceilalți termeni ai șirului.

Exemple

1. Fie $x_1 = \sqrt{2}$ și relația de recurență $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, pentru orice $n \geq 1$.

Atunci obținem șirul $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$

2. Fie $x_0 = 1, x_1 = 1$ și $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ pentru orice $n \geq 2$. Aflăm termenii șirului: $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = x_1 + x_0 = 2, x_3 = x_2 + x_1 = 3, x_4 = x_3 + x_2 = 5, x_5 = x_4 + x_3 = 8, \dots$

Așadar, obținem șirul 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., care se numește **șirul lui Fibonacci**¹.

Se poate determina formula termenului general al șirului lui Fibonacci:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$



Leonardo da Pisa (Fibonacci)

Șirul lui Fibonacci are aplicații în diverse domenii ale matematicii: combinatorică, teoria numerelor, analiză matematică

ș.a. El posedă proprietăți interesante (de exemplu, toți termenii șirului de rang divizibil cu 3 sunt numere pare, termenii de rang divizibil cu 4 sunt divizibili cu 3, iar termenii de rang divizibil cu 15 sunt divizibili cu 10).

Definiție. Două șiruri, $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$, se numesc **egale** dacă $x_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, șirurile $\left(\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2} \right)_{n \geq 1}$ și 1, 0, 1, 0, ... sunt egale, iar șirurile 1, 0, 1, 0, ... și 0, 1, 0, 1, ... nu sunt egale, cu toate că au aceeași mulțime de valori ale termenilor: $\{0, 1\}$.

Definiție. Un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **constant** dacă $x_{n+1} = x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu

Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit de $x_1 = 3$ și $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, \forall n \geq 1$, este constant: $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 3, \dots$

¹ Leonardo da Pisa (Fibonacci) (1175–1250) – matematician italian.

1.3. Șiruri monotone. *Șiruri mărginite

Definiții. • Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **strict crescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Șirurile crescătoare sau descrescătoare se numesc **șiruri monotone**.

• Șirurile strict crescătoare sau strict descrescătoare se numesc **șiruri strict monotone**.

Observație. Există șiruri care nu sunt monotone.

De exemplu, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, ...

Pentru a determina dacă un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător sau descrescător, se poate proceda astfel:

1. Studiem semnul *diferenței* a doi termeni consecutivi:

- dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător;
- dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

2. Dacă termenii șirului sunt pozitivi, atunci comparăm cu unitatea *raportul* a doi termeni consecutivi:

- dacă $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, și $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător;
- dacă $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, și $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.

Înlocuind semnul „ $\geq$ ” („ $\leq$ ”) cu „ $>$ ” („ $<$ ”), se obțin criterii analoge pentru monotonia strictă.

Exercițiu rezolvat

Să se studieze monotonia șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă: a) $x_n = \frac{n+1}{n+2}$; b) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } x_{n+1} - x_n &= \frac{(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n - 3}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Ceea ce înseamnă că $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul este strict crescător.

b) Observăm că $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Atunci } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot n(n+1) = \frac{n}{n+2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare, șirul este strict descrescător.

Definiții. • Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **mărginit superior (mărginit inferior)** dacă există un număr real a (respectiv b), astfel încât $x_n \leq a$ (respectiv $x_n \geq b$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
 • Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ se numește **mărginit** dacă el este mărginit superior și inferior, adică există două numere $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \leq x_n \leq b$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este **nemărginit** dacă $\forall M > 0, \exists n_M \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|x_{n_M}| > M$.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se stabilească dacă șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{2n+1}{2n+3}$, este mărginit.

Rezolvare:

$x_n = \frac{2n+1}{2n+3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul este mărginit inferior.

Să demonstrăm că șirul este mărginit și superior.

Într-adevăr, $x_n = \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2n+1+2-2}{2n+3} = \frac{(2n+3)-2}{2n+3} = 1 - \frac{2}{2n+3} < 1, \forall n \geq 1$.

Așadar, șirul, fiind mărginit inferior și superior, este mărginit:

$$0 < \frac{2n+1}{2n+3} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exerciții propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Să se dea exemple de șiruri finite, infinite.
2.  **Lucrați în perechi!** Să se dea un exemplu de șir numeric cu termeni pozitivi, care strict descrescător „se apropie” de zero.
3. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{2n+1}{n+4}$.
- a) Să se scrie primii cinci termeni ai șirului.
- b) Să se studieze monotonia șirului.
- B** 4. Să se dea un exemplu de șir numeric cu termeni negativi, care strict crescător „se apropie” de zero.
5. Să se dea exemple de șiruri care nu sunt monotone.
6. Să se studieze monotonia șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $x_n = \frac{3n+1}{4n+3}$; b) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; c) $x_n = \frac{3n+1}{5n}$.
- C** 7. Să se găsească formula termenului al n -lea ($n \geq 1$) al șirului:
- a) 1, 3, 5, 7, 9, ...; b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$
8. Este termen al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, unde $a_n = n^2 - 17n$, numărul:
- a) -30; b) -72; c) -200?
9.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale șirului lui Fibonacci în natură.*

Profilul real

- A₁** 1. Să se dea exemple de șiruri mărginite, șiruri nemărginite, șiruri monotone.
2.  **Lucrați în perechi!** Folosind cuantificatorii logici, să se scrie negația propoziției: „Șirul numeric $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior”.
3. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$.
4. Pentru șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin formula termenului general $x_n = \left(\frac{11}{10}\right)^n$:
- să se scrie primii cinci termeni;
 - să se studieze monotonia și mărginirea șirului.
5. Să se demonstreze că șirul numeric $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{3n-1}{3n+1}$, este strict crescător și mărginit.
6. Să se determine marginea superioară și marginea inferioară pentru mulțimea:
- $X = \left\{ \frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
 - $X = \left\{ -\frac{n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- B₁** 7. Pentru șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit de $x_1 = -1$ și relația de recurență $x_{n+1} = x_n - 2$, $\forall n \geq 1$:
- să se determine formula termenului de rang n ;
 - să se studieze monotonia și mărginirea șirului.
8. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ și să se definească acest șir prin formula termenului de rang n , dacă:
- $x_1 = -10$, $x_{n+1} = x_n + 5$ pentru $n \geq 1$;
 - $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 2x_n$ pentru $n \geq 1$.
- Să se studieze monotonia și mărginirea acestor șiruri.
9. Să se scrie cu ajutorul cuantificatorilor:
- submulțimea $X \subset \mathbb{R}$ nu este mărginită superior;
 - numărul m nu este marginea inferioară a submulțimii $X \subset \mathbb{R}$;
 - numărul M nu este marginea superioară a submulțimii $X \subset \mathbb{R}$.
- C₁** 10.  **Investigați!** Fie șirul recurent $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3^n}$, $\forall n \geq 1$.
- Să se determine formula termenului general al șirului.
 - Să se studieze monotonia șirului.
 - Să se stabilească dacă șirul este mărginit.
11. Să se determine marginea inferioară și marginea superioară pentru mulțimea:
- $A = \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq 3\}$;
 - $B = \{x \in \mathbb{R}, x^3 < 7\}$.
12.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale șirului lui Fibonacci în diverse domenii (biologie, medicină, fizică).*

§2 Progresii aritmetice. Progresii geometrice

Vom cerceta șiruri numerice speciale care admit aplicații importante.

2.1. Progresii aritmetice

2.1.1. Noțiunea de progresie aritmetică

Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = a_n + 3$ pentru orice $n \geq 1$. Deci, $a_1 = 2$, $a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$, $a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$, $a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$, ...

Observăm că fiecare termen al acestui șir, începând cu al doilea, se obține prin adăugarea la termenul precedent a aceluiași număr, și anume 3.

Definiție. Se numește **progresie aritmetică** un șir de numere reale în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin adăugarea aceluiași număr.

Șirul de numere $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este o progresie aritmetică dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $a_{k+1} = a_k + r$, unde r este un număr real. Numărul r se numește **rația progresiei aritmetice**, iar a_1 este **primul termen** al acesteia.

O progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ este complet determinată, dacă se cunosc primul termen a_1 și rația r .

Dacă:

- $r > 0$, atunci progresia aritmetică este **strict crescătoare**;
- $r < 0$, atunci progresia aritmetică este **strict descrescătoare**;
- $r = 0$, atunci progresia aritmetică este **constantă**.

Exemple

1. Pentru $a_1 = 1$, $r = 2$, obținem progresia aritmetică 1, 3, 5, 7, ...
2. Dacă $a_1 = 1$, $r = -3$, atunci avem progresia aritmetică 1, -2, -5, -8, ...
3. Pentru $a_1 = 7$, $r = 0$, obținem progresia aritmetică 7, 7, 7, ...

Definiție. Se spune că numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt **numere în progresie aritmetică** dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Progresia aritmetică posedă o proprietate importantă, care îi justifică denumirea.

Teorema 4. Orice termen al unei progresii aritmetice $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Exercițiu. Demonstrați teorema 4.

Este adevărată și

Reciproca teoremei 4. Dacă fiecare termen al unui șir de numere reale, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini, atunci acest șir este o progresie aritmetică.

Demonstrație

Să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui șir oarecare $(a_n)_{n \geq 1}$ are loc relația: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \geq 2$.

Atunci $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, de unde obținem $a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ sau $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$.

Aceasta înseamnă că diferența dintre orice termen al șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ și predecesorul său este un număr constant, deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică. ►

2.1.2. Formula termenului general al unei progresii aritmetice

Fie a_1 primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, iar r rația ei. Atunci, conform definiției progresiei aritmetice, avem:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r, \\ a_3 &= a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r, \\ a_4 &= a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r, \\ &\dots \end{aligned}$$

Teorema 5. Termenul general al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r. \quad (1)$$

Demonstrație

Vom demonstra formula (1) prin metoda inducției matematice.

Notăm prin $A(n)$ afirmația din egalitatea (1).

1. Pentru $n=1$, afirmația $A(1)$ este adevărată.

2. Fie afirmația $A(k)$ adevărată pentru $k \geq 1$, adică, $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$.

Să demonstrăm că este adevărată și afirmația $A(k+1)$.

Într-adevăr, $a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1) \cdot r + r = a_1 + k \cdot r$.

3. Conform metodei inducției matematice, afirmația $A(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n . ►

Observație. Progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ de rație r poate fi definită prin relația de recurență $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall n \geq 1$, sau prin relația de recurență $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $\forall n \geq 1$, și primul termen a_1 .

2.1.3. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Teorema 6. Fie numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ în progresie aritmetică.

Atunci suma termenilor egal depărtați de termenii extremi este egală cu suma termenilor extremi: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, pentru orice $k \geq 1$.

Demonstrație

Fie numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ în progresie aritmetică. Dacă r este rația progresiei, atunci

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r \quad \text{și} \quad a_{n-k+1} = a_1 + (n-k) \cdot r,$$

de unde $a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k-1)r] + [a_1 + (n-k)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Dar $a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n-1)r] = 2a_1 + (n-1)r$.

Astfel, obținem egalitatea $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n$. ►

Folosind teorema 6, se obține ușor formula generală pentru suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice.

Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ și o scriem de două ori astfel:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Adunând aceste două egalități membru cu membru, obținem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Conform teoremei 6:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{n-2} + a_3 = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1.$$

De aceea $2S_n = n(a_1 + a_n)$, de unde $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Rețineți: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (2) – formula sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$.

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$ (3) – formula de calcul al sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, aplicabilă în cazul în care se cunosc primul termen a_1 și rația r .

Exercițiu. Demonstrați formula (3).

Exerciții rezolvate

☞ 1. Să se afle suma numerelor naturale de la 1 la 100.

Rezolvare:

Aceste 100 de numere sunt în progresie aritmetică. Primul termen al progresiei este 1, iar ultimul termen este 100.

$$\text{Deci, } S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 5\,050.$$

☞ 2. Să se afle primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_{10} = 131$, $r = 12$.

Rezolvare:

Aplicând formula (1), obținem: $131 = a_1 + (10-1) \cdot 12 \Leftrightarrow 131 = a_1 + 108 \Leftrightarrow a_1 = 23$.

☞ 3. Să se afle primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$.

Rezolvare:

Folosind formula (1), avem:
$$\begin{cases} a_1 + 4r = 27, \\ a_1 + 26r = 60. \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul și obținem $a_1 = 21$, $r = 1,5$.

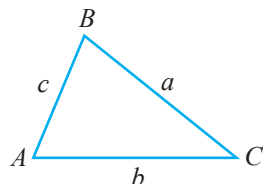
4. Să se calculeze suma primilor 100 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_1 = 10$, $a_{100} = 150$.

Rezolvare:

Aplicând formula (2), obținem:

$$S_{100} = \frac{10+150}{2} \cdot 100 = 80 \cdot 100 = 8\,000.$$

5. Să se demonstreze că dacă cotangentele unghiurilor triunghiului ABC sunt în progresie aritmetică, atunci pătratul lungimilor laturilor respective ale acestui triunghi de asemenea sunt în progresie aritmetică.



Rezolvare:

Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC . Din condiția problemei avem, de exemplu, $\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C \Leftrightarrow \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos B}{\sin B} - \frac{\cos C}{\sin C} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B \cos A - \sin A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin C \cos B - \sin B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

$$\text{De aici obținem } \frac{\sin(B-A)}{\sin A} = \frac{\sin(C-B)}{\sin C}.$$

Deoarece $\sin C = \sin(B+A)$, $\sin A = \sin(B+C)$, obținem

$$\sin(B-A)\sin(B+A) = \sin(C-B)\sin(C+B) \Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 B - \sin^2 C.$$

Dar $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$. Astfel, rezultă că $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$. Prin urmare, pătratul lungimilor laturilor triunghiului, a^2, b^2, c^2 , sunt în progresie aritmetică.

2.2. Progresii geometrice

LEGENDA JOCULUI DE ȘAH



O legendă spune că jocul de șah a fost inventat în India de înțeleptul Sessa, în secolul al IV-lea. Încântat de joc, regele hindus a vrut sa-l răsplătească pe inventator și a rămas uimit auzind că acesta cere să i se dea un bob de grâu pentru primul pătrat al tablei de șah, 2 boabe – pentru al doilea pătrat, 4 – pentru al treilea, 8 – pentru al patrulea ș.a.m.d. până la pătratul al 64-lea. Această doleanță i s-a părut regelui foarte modestă. Oare așa să fie?

2.2.1. Noțiunea de progresie geometrică

Fie șirul de numere reale $(b_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $b_1 = 3$ și $b_{n+1} = b_n \cdot 4$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci $b_1 = 3$, $b_2 = b_1 \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$, $b_3 = b_2 \cdot 4 = 12 \cdot 4 = 48$, $b_4 = b_3 \cdot 4 = 48 \cdot 4 = 192$, ...

Observăm că fiecare termen al acestui șir, începând cu al doilea, se obține prin înmulțirea termenului precedent cu același număr, și anume 4.

Definiție. Se numește **progresie geometrică** un șir de numere reale al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin înmulțirea cu același număr nenul.

Șirul de numere $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ ($b_1 \in \mathbb{R}^*$) este o progresie geometrică dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $b_{k+1} = b_k \cdot q$, $q \in \mathbb{R}^*$.

Numărul q se numește **rația progresiei geometrice**, iar b_1 este **primul termen** al ei.

O progresie geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ este complet determinată dacă se cunosc primul termen b_1 și rația q .

Definiție. Se spune că numerele $b_1, b_2, \dots, b_n$ sunt **numere în progresie geometrică** dacă ele sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Exemple

1. Pentru $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ obținem progresia geometrică $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

2. Pentru $b_1 = 2$, $q = -2$ obținem progresia geometrică $2, -4, 8, -16, 32, \dots$

Progresia geometrică cu termeni pozitivi posedă o proprietate importantă, care îi justifică denumirea.

Teorema 7. Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots$, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$.

Demonstrație

Conform definiției progresiei geometrice, pentru orice $n \geq 2$, $b_n = b_{n-1} \cdot q$ și $b_n = \frac{b_{n+1}}{q}$.

Atunci $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, de unde $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Deoarece $b_n > 0$, obținem $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. 

Observație. Relația $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (sau $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$) este adevărată pentru oricare progresie geometrică.

Este adevărată și

Reciproca teoremei 7. Dacă fiecare termen al unui șir de numere reale pozitive, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini, atunci acest șir este o progresie geometrică.

Exercițiu. Demonstrați reciproca teoremei 7.

2.2.2. Formula termenului general al unei progresii geometrice

Fie b_1 primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ și q rația ei. Atunci, din definiția progresiei geometrice, avem: $b_2 = b_1 \cdot q$,

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$

.....

Teorema 8. Termenul general al unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este dat de formula:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \quad (4)$$

Demonstrație

Vom aplica metoda inducției matematice.

Notăm cu $P(n)$ afirmația din egalitatea (4).

1. Pentru $n = 1$, afirmația $P(1)$ este evidentă.

2. Fie afirmația $P(k)$ adevărată pentru $k \geq 1$, adică $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$.

Să demonstrăm că este adevărată afirmația $P(k+1)$.

Într-adevăr, $b_{k+1} = b_k \cdot q = (b_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q = b_1 \cdot q^k$.

3. Conform metodei inducției matematice, afirmația $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n . ►

Observație. Progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ de rație q poate fi definită prin relația de recurență $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall n \geq 1$, și primul termen b_1 .

2.2.3. Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu primul termen b_1 și rația q .

Observație. Ca și pentru numere în progresie aritmetică, pentru numerele $b_1, b_2, \dots, b_n$, care sunt în progresie geometrică, are loc relația:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n,$$

adică produsul termenilor egal depărtați de extremi este egal cu produsul termenilor extremi.

Fie suma primilor n termeni ai acestei progresii:

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n. \quad (5)$$

Pentru a calcula S_n , examinăm două cazuri:

- 1) rația $q = 1$; atunci $S_n = b_1 \cdot n$;
- 2) rația $q \neq 1$; atunci înmulțim ambii membri ai egalității (5) cu q și obținem:

$$qS_n = b_1q + b_2q + \dots + b_{n-1}q + b_nq.$$

Dar $b_1q = b_2$, $b_2q = b_3$, ..., $b_{n-1}q = b_n$, de aceea

$$qS_n = b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_nq. \quad (6)$$

Scăzând membru cu membru (5) din (6), obținem:

$$qS_n - S_n = b_nq - b_1 \Leftrightarrow S_n \cdot (q - 1) = b_nq - b_1.$$

Deoarece $q \neq 1$, $S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1} = \frac{b_1 - b_nq}{1 - q}$.

Rețineți: $S_n = \frac{b_1 - b_nq}{1 - q}$, $q \neq 1$ – formula sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$.

$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, $q \neq 1$ (7) – formula de calcul al sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice, aplicabilă în cazul în care se cunosc primul termen b_1 și rația q .

Exercițiu. Demonstrați formula (7).

Să revenim la legenda jocului de șah.

Pentru a răspunde la întrebare, trebuie să aflăm numărul de boabe de grâu, adică să calculăm suma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$.

Avem: $b_1 = 1$, $q = 2$, $b_{64} = 2^{63}$.

Obținem $S_{64} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$.

Am obținut un număr natural de 20 de cifre. Considerând că 30 000 000 de boabe de grâu cântăresc aproximativ o tonă, ne convingem că doleanța lui Sessa nu a putut fi îndeplinită. (Comparați: producția mondială de grâu în anul agricol 2018–2019 a constituit circa 770 000 000 t, iar înțeleptul a cerut aproximativ 614 miliarde de tone.)

Progresia geometrică:

- cu $b_1 > 0$, $q > 1$ sau cu $b_1 < 0$, $0 < q < 1$ este **strict crescătoare**;
- cu $b_1 < 0$, $q > 1$ sau cu $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ este **strict descrescătoare**;
- cu $q < 0$ nu este monotună;
- cu $q = 1$ este **constantă**.

Exercițiu. Dați câte un exemplu pentru fiecare caz.

Progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ se numește **infiniț descrescătoare** dacă rația q verifică relația $|q| < 1$. Pentru progresia geometrică infiniț descrescătoare $(b_n)_{n \geq 1}$, obținem:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Când n crește, q^n tinde la zero („se apropie” de zero), deoarece $|q| < 1$, iar suma S_n tinde la valoarea expresiei $\frac{b_1}{1 - q}$. (A se vedea și § 3, secvența 3.3.)

Exerciții rezolvate

1. Să se afle primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă $\begin{cases} b_2 - b_1 = -4, \\ b_3 - b_1 = 8. \end{cases}$

Rezolvare:

Folosind formula (4), scriem sistemul: $\begin{cases} b_1 q - b_1 = -4, \\ b_1 q^2 - b_1 = 8. \end{cases}$

Rezolvând acest sistem, obținem $b_1 = 1$, $q = -3$.

2. Un turist, urcând pe munte, în prima oră a parcurs o distanță de 800 m. În fiecare oră următoare el a parcurs o distanță cu 25 m mai mică decât în ora precedentă. În câte ore turistul a parcurs distanța de 5 700 m?



Rezolvare:

Numerele 800, 775, 750, ... sunt în progresie aritmetică. Astfel, $a_1 = 800$, $r = -25$.

Din condiția problemei rezultă sistemul:
$$\begin{cases} a_n = x = 800 - 25(n-1), \\ S_n = \frac{800+x}{2} \cdot n = 5700. \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem și obținem $x = 1625$ m, $n = 8$ ore.

Răspuns: 8 ore.

3. Să se determine numerele pozitive x, y, z care satisfac simultan condițiile:

- 1) x, y, z sunt în progresie geometrică;
- 2) $x, y+4, z$ sunt în progresie aritmetică;
- 3) $x, y+4, z+32$ sunt în progresie geometrică.

Rezolvare:

Obținem sistemul:
$$\begin{cases} xz = y^2 \\ x+z = 2(y+4) \\ x(z+32) = (y+4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ y = 4x-2 \\ z = 2y-x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 20x + 4 = 0, \\ y = 4x-2, \\ z = 7x+4. \end{cases}$$

Rezolvând ultimul sistem, obținem soluția: $x = 2$, $y = 6$, $z = 18$.

Exerciții propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $a_1 = 7$, $r = 2$; b) $a_1 = -3$, $r = 5$; c) $a_1 = 1,3$, $r = 0,3$; d) $a_1 = \frac{2}{7}$, $a_2 = \frac{1}{5}$.
2. Să se afle termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $a_{10} = 131$, $r = 12$; b) $a_{200} = 0$, $r = -3$.
3. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $b_1 = -10$, $q = \frac{1}{2}$; b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \sqrt{3}$.
4. Fie șirul: a) 6, 9, 12, 15, ...; b) 4, 8, 16, 32, ...
Să se completeze astfel încât propoziția să fie adevărată:
„Șirul este o progresie cu rația .
- B** 5. Pentru a construi o seră, se folosesc piloni instalați vertical. Cel mai scurt pilon are înălțimea de 5 dm, iar fiecare dintre pilonii următori este cu 3 dm mai înalt decât precedentul. Să se afle înălțimea celui mai înalt pilon, al șaptelea.
6. Într-un amfiteatru sunt 10 rânduri. În primul rând sunt 100 de locuri, iar în fiecare dintre rândurile următoare – cu 20 de locuri mai mult decât în cel precedent. Câte locuri sunt în total în amfiteatru?
7. Vara, la munte, odată cu creșterea altitudinii cu câte 100 m, temperatura aerului scade cu $0,7^\circ\text{C}$. La poalele muntelui sunt 26°C . La ce altitudine se află un turist, dacă termometrul indică $14,8^\circ\text{C}$?
- C** 8.  **Lucrați în perechi!** O bancă dă o dobândă anuală de 9%. Ce sumă va primi peste 5 ani o persoană care a depus la bancă 2700 lei, dacă dobânda calculată în fiecare an se adaugă la suma existentă?

9. Fântânarilor angajați la săparea unei fântâni li s-a promis 150 de lei pentru primul metru săpat, iar pentru fiecare metru săpat în continuare – cu 60 de lei mai mult decât pentru cel precedent. Să se afle câți lei vor câștiga fântânarii, dacă adâncimea fântânii va fi de 12 metri.
10. În condiții favorabile, în fiecare oră, orice bacterie se divizează în altele două. Câte bacterii se vor reproduce dintr-o bacterie timp de 10 ore?
11.  **Lucrați în grup!** Proiect *Progresiile în viitoarea mea profesie.*

Profilul real

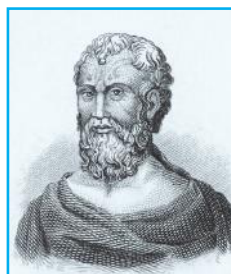
- A₁** 1. Să se afle suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă $\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} = \frac{1}{3}$ și $b_1 + b_2 + b_3 = 52$.
2. Să se determine formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ și S_n , dacă:
- a) $a_1 = -4$, $r = \frac{1}{3}$, $n = 14$; b) $a_1 = \frac{3}{5}$, $r = \frac{1}{7}$, $n = 25$.
3. Să se scrie formula termenului de rang n al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $b_1 = 9$, $b_{n+1} = 2b_n$; b) $b_1 = 10$, $b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$.
4. Fie o progresie geometrică cu $S_3 = 40$, $S_6 = 60$. Să se afle S_9 .
5. Fie șirul: a) 16, 12, 8, 4, ...; b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$
- Să se completeze astfel încât propoziția să fie adevărată:
- „Șirul este o progresie cu rația .

- B₁** 6. Să se demonstreze că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ sunt în progresie aritmetică.
7. Să se afle primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $b_4 = -12$, $b_7 = 23\frac{7}{16}$; b) $b_1 + b_4 = \frac{7}{16}$, $b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}$.
8. Să se determine numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$ care satisfac simultan condițiile:
- a) x, y, z sunt în progresie geometrică;
- b) $x, y + a, z$ sunt în progresie aritmetică;
- c) $x, y + a, z + b$ sunt în progresie geometrică.
9. Să se afle valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $2x - 1$, $2x + 1$, $x + 26$ sunt în progresie geometrică.
10. Să se determine primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $S_4 = 12$, $q = 3$; b) $S_6 = 1$, $q = -2$.

- C₁** 11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$.
12. Lungimile laturilor triunghiului ABC , considerate în ordine consecutivă, sunt în progresie geometrică crescătoare. Rația acestei progresii este mai mică sau mai mare decât 2?
13. Să se reprezinte numărul 180 ca suma a patru numere reale pozitive, care sunt în progresie geometrică cu rația $q \neq 1$, dacă se știe că termenul al treilea este cu 36 mai mare decât primul termen. Să se găsească două posibilități.
14.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale progresiilor în diverse domenii.*

§3 Limita unui șir. Șiruri convergente, șiruri divergente

În Antichitate, matematicienii greci Arhimede, Zenon din Elea¹ și alții au utilizat șirurile numerice pentru a obține aproximări cât mai bune ale unor mărimi. Mult mai târziu, s-au introdus conceptele de șir convergent și limită.



Zenon din Elea

3.1. Noțiunea de limită a unui șir

Se numește **vecinătate a unui punct** $a \in \mathbb{R}$ orice interval deschis de forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Vecinătatea punctului a se notează cu $U(a, \varepsilon)$ sau $V(a, \varepsilon)$.

Prin urmare, $U(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$.

Vom spune că un punct x_0 este **punct interior** al mulțimii X , $X \subseteq \mathbb{R}$, dacă există o vecinătate $U(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, a acestui punct, astfel încât $U(x_0, \varepsilon) \subset X$.

Definiție (în limbajul vecinătăților). Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale și a un număr real. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are **limita** a dacă în orice vecinătate a punctului a se conțin toți termenii șirului, cu excepția, poate, a unui număr finit de termeni.

Faptul că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are limita a se scrie: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ (se citește: „limita șirului x_n când n tinde la infinit este egală cu a ”) sau $x_n \rightarrow a$ când $n \rightarrow \infty$ (se citește: „ x_n tinde la a când n tinde la ∞ ”).

Observație. Se scrie $n \rightarrow \infty$, și nu $n \rightarrow +\infty$, deoarece n este număr natural și nu este pericol de confuzie.

Definiție (în limbajul ε). Numărul $a \in \mathbb{R}$ este **limita** șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|x_n - a| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$.

Observații. 1. Dacă negăm în definiția cu „ ε ”, obținem: Numărul $a \in \mathbb{R}$ nu este limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă $\exists \varepsilon_0 > 0$, astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists n_0 > n$ cu proprietatea $|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.

2. În definiția în limbajul ε se poate înlocui ε cu $\alpha\varepsilon$, unde numărul real $\alpha > 0$ este fixat. Atunci putem formula definiția în limbajul ε astfel: numărul $a \in \mathbb{R}$ este limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|x_n - a| < \alpha\varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon$, unde $\alpha > 0$.

Exerciții rezolvate

☞ **1.** Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$. Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstrație

Fie U o vecinătate arbitrară a punctului 0, $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n > \frac{1}{\varepsilon}$, adică $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Deci, $x_n = \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) = U$ dacă $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Așadar, termenii șirului $(x_n)_{n \geq 1}$,

¹ Zenon din Elea (cca 490–cca 430 î.H.) – filozof și matematician grec.

începând cu rangul $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, se află în vecinătatea U a punctului 0.

Prin urmare, numărul 0 este limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$.

Rețineți: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

Demonstrație

Vom demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, se verifică inegalitatea $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$. Evaluăm $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ cerem ca $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Dacă $\varepsilon > \frac{1}{2}$, atunci inegalitatea $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ este verificată de orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, atunci ea este verificată de orice $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, de aceea în acest caz considerăm $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil + 1$, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$.

Așadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$, oricare ar fi n , $n > n_\varepsilon$. Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$.

3. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n$ nu are limită.

Demonstrație

Presupunem contrariul, că există un număr $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = a$. Conform definiției limitei, pentru orice $\varepsilon > 0$, în particular pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $|x_n - a| < \frac{1}{2}$, $\forall n > n_\varepsilon$. Deoarece $x_n \in \{-1, 1\}$, rezultă că au loc simultan inegalitățile $|1 - a| < \frac{1}{2}$ și $|-1 - a| < \frac{1}{2}$. Obținem că $2 = |(1-a) + (-1-a)| \leq |1-a| + |-1-a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, adică $2 < 1$. Absurd. Deci, șirul dat nu posedă limită.

4. Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstrație

Vom demonstra că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| < \varepsilon$, $\alpha > 0$.

Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$, luând în considerare că $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$ și rezolvând inecuația $\left| \frac{1}{n^\alpha} \right| < \varepsilon$ cu necunoscuta n , obținem $n > \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$. Observăm că $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \right\rceil$ este un număr

natural. Așadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \right\rceil \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| < \varepsilon$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$. Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

Rețineți: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

Exercițiu. Folosind definiția în limbajul vecinătăților, demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n$, nu are limită.

Definiții. • Se spune că șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ are **limita plus infinit** și se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

• Se spune că șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ are **limita minus infinit** și se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n < -\varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

• Se spune că șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ are **limită infinită** și se scrie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $|x_n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

Observație. Evident, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Exemple

1. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = n^2$. Evident, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

2. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = -2^n$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

3. Pentru șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^n \cdot n$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Exercițiu rezolvat

☞ Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = q^n$, $q < -1$. Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

Rezolvare:

Conform definiției, vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $|q^n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$. Relația $|q^n| > \varepsilon$ este echivalentă cu $|q|^n > \varepsilon$. Logaritmând inegalitatea în baza $|q|$, $|q| > 1$, obținem:

$$\log_{|q|} |q|^n > \log_{|q|} \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|q|} \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$, astfel încât $|q^n| > \varepsilon$ oricare ar fi $n > n_\varepsilon$. Conform definiției, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

La demonstrația teoremelor și la rezolvarea exemplelor cu limite infinite uneori vom utiliza următoarele mulțimi:

$$U(+\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \varepsilon, \varepsilon > 0\};$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\varepsilon, \varepsilon > 0\};$$

$$U(\infty, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \varepsilon, \varepsilon > 0\},$$

care se mai numesc **vecinătăți**, respectiv, ale lui $+\infty$, $-\infty$ și ∞ .

În definițiile vecinătăților simbolurilor $+\infty$ și $-\infty$, condiția $\varepsilon > 0$ uneori poate fi omisă. Această condiție este introdusă doar pentru a uniformiza formulările noțiunilor. Deci, vecinătatea oricărui număr finit, a lui $+\infty$, $-\infty$ și ∞ se determină cu ajutorul unui număr pozitiv. Această convenție este comodă uneori la formularea rezultatelor în care nu este esențial dacă limita este finită sau infinită. Aplicând această terminologie, definiția limitei finite sau a oricărei limite infinite poate fi formulată astfel:

Definiții. • Se spune că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ **are limita** a (unde a este număr finit, $+\infty$, $-\infty$ sau ∞) dacă pentru orice vecinătate $U(a, \varepsilon)$ a lui a există numărul natural n_u , astfel încât $x_n \in U$ oricare ar fi $n > n_u$.

• Șirul care are limită finită se numește **șir convergent**. Șirul care nu este convergent (adică șirul care nu are limită sau are limita infinită) se numește **șir divergent**.

Teorema 9. Dacă un șir de numere reale are limită, atunci această limită este unică.

Teorema 10 (Weierstrass¹). Orice șir numeric monoton și mărginit este convergent.



Karl Weierstrass

Demonstrație

Să considerăm cazul șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ crescător și mărginit superior. Atunci $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Conform ipotezei, mulțimea $\{x_n \mid n \geq 1\}$ este nevidă și mărginită. Fie $x_0 = \sup(x_n)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Conform teoremei de caracterizare a marginii superioare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un rang n_ε , astfel încât $x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător, deci $x_n > x_{n_\varepsilon} > x_0 - \varepsilon$ pentru orice $n > n_\varepsilon$. Pe de altă parte, din condiția că x_0 este marginea superioară, $x_n \leq x_0 < x_0 + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Așadar, pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ sau $|x_n - x_0| < \varepsilon$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, și, cum $x_0 \in \mathbb{R}$, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Analog se demonstrează cazul șirului descrescător și mărginit inferior. ►

Exercițiu rezolvat

☞ Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit de $x_1 = \sqrt{2}$ și relația de recurență $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $\forall n \geq 1$, este convergent.

Rezolvare:

Să demonstrăm că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător. Considerăm diferența $x_{n+1}^2 - x_n^2$. Obținem: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + x_n - x_n^2 = (1 + x_n)(2 - x_n) > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din ultima relație avem $x_{n+1}^2 > x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obținem $x_{n+1} > x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, șirul este crescător.

Folosind metoda inducției matematice, să demonstrăm că șirul este mărginit superior.

Avem $x_1 = \sqrt{2} < 2$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Presupunem că $x_n < 2$. Atunci $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

¹ Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) – matematician german.

Prin urmare, conform metodei inducției matematice, $x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Conform teoremei lui Weierstrass, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, fiind monoton crescător și mărginit superior, este convergent.

Observații. 1. În demonstrația teoremei 10 am obținut că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n)$, dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este crescător. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, atunci analog se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} (x_n)$.

2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci se mai spune că **șirul** $(x_n)_{n \geq 1}$ **converge** la numărul a .

Teorema 11. Un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ converge la x_0 dacă și numai dacă orice subșir $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ converge la x_0 . Adică $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$, pentru orice $(x_{n_k})_{k \geq 1}$.

Observație. Din teorema 11 rezultă că pentru ca un șir numeric să nu aibă limită, este suficient ca el să conțină două subșiruri cu limite diferite.

3.2. Proprietăți ale șirurilor convergente

Fie șirurile de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$. Șirurile $(\lambda \cdot x_n)_{n \geq 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$; $(x_n \cdot y_n)_{n \geq 1}$; $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq 1}$, $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$; $(x_n^{y_n})_{n \geq 1}$, $\forall x_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$, se numesc respectiv **produsul unui șir cu o constantă, șir-sumă, șir-produs, șir-cât, șirul puterilor**.

Apare în mod firesc întrebarea: ce se poate spune despre limita șirurilor definite mai sus, în cazul în care șirurile inițiale au limită, și, dacă au limită, cum se calculează limita lor?

Teorema 12

1. Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este un șir convergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(\lambda \cdot x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot a = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, adică **factorul constant poate fi extras de sub semnul limitei**.

2. Dacă șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, atunci șirul $(x_n + y_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, adică **limita sumei a două șiruri convergente este egală cu suma limitelor acestor șiruri**.

3. Dacă șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, atunci șirul $(x_n \cdot y_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, adică **limita produsului a două șiruri convergente este egală cu produsul limitelor acestor șiruri**.

4. Dacă șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ ($y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$) și $b \neq 0$, atunci șirul-cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$, adică **limita câtului a două șiruri convergente este egală cu câtul limitelor acestor șiruri**.

3.3. Suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare

Teorema 13. Fie șirul $(S_n)_{n \geq 1}$, $S_n = b_1 + b_1q + \dots + b_1q^{n-1}$, unde $0 < |q| < 1$ și $b_1 \neq 0$.

$$\text{Atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Demonstrație

Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice infinit descrescătoare $b_1, b_1q, b_1q^2, \dots$ poate fi scrisă sub forma $S_n = \sum_{i=1}^n b_1q^{i-1}$, $|q| < 1$.

Știind că $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $|q| < 1$, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{b_1}{1-q}, \text{ deoarece } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0. \quad \blacktriangleright$$

3.4. Numărul e

Teorema 14. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, este convergent.

Demonstrație

Vom aplica teorema 10 (Weierstrass) din secvența 3.1 și *inegalitatea mediilor*:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Vom arăta că șirul $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, este monoton și mărginit.

Studiem monotonia șirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

Considerăm numerele $\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}, 1$.

Conform inegalității mediilor, pentru aceste $n+1$ numere pozitive avem:

$$\begin{aligned} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} &> \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Prin urmare, $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, de unde rezultă că șirul dat este strict crescător.

Să demonstrăm că șirul este mărginit superior. Considerăm următoarele $n+2$ numere pozitive: $\underbrace{1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Din inegalitatea mediilor, aplicată acestor $n+2$ numere, rezultă:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+2} > \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1 > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4, \quad \forall n \geq 1.$$

Deci, șirul este mărginit superior.

Conform teoremei lui Weierstrass, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, fiind monoton crescător și mărginit superior, este convergent. ►

Limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, se notează cu e , după inițiala numelui lui L. Euler¹, și reprezintă un număr irațional care



Daniel Bernoulli

apartine intervalului $(2, 3)$. Iraționalitatea numărului e a fost demonstrată în 1815 de J. Fourier². În 1728, D. Bernoulli³ a stabilit că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284590...$$

$$\text{Rețineți: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (8)$$



Leonard Euler



Jean-Baptiste Joseph Fourier

Observație. Numărul e este o constantă fundamentală în analiza matematică. Logaritmul în baza e are aplicații în matematică, fizică și în multe alte domenii, se numește **logaritm natural** și se notează $\ln x (= \log_e x)$.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1}$.

Rezolvare:

$$\text{Aplicând teorema 11 și relația (8), obținem: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+8}{3n+7}\right)^{6n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n+7}\right)^{6n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{1} \cdot \frac{1}{3n+7} (6n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{1}} \right\}^{\frac{1(6n+1)}{3n+7}} = e^2.$$

¹ Leonard Euler (1707–1783) – matematician, fizician și astronom elvețian.

² Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) – matematician francez.

³ Daniel Bernoulli (1700–1782) – matematician și fizician elvețian.

2. Să se calculeze limita șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $x_n = \sqrt{n^2 + 2n - 3} - n$;

b) $x_n = \frac{n+2}{3n+1}$;

c) $x_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$;

d) $x_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}$.

Rezolvare:

a) Amplificăm cu conjugatul expresiei:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n - 3} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n - 3) - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n - 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{\sqrt{n^2 + 2n - 3} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 - \frac{3}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} + 1 \right)} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

c) Amplificăm cu conjugatul expresiei de la numărător:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0.$$

d) Folosim formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}}{\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{4}{3}.$$

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se aducă exemple de șiruri numerice convergente, divergente.

2. Aplicând definiția limitei șirului numeric, să se arate că:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n} = 4$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2} = 2$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{4n+5} = \frac{1}{2}$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{n+1} = 5$.

3. Folosind definiția limitei șirului, să se arate că:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} \neq \frac{1}{2}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n+1} \neq 1$.

B₁ 4. Aplicând teorema lui Weierstrass, să se demonstreze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$; b) $x_n = 1 + \frac{1}{3^n}$; c) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

5. Să se calculeze:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2 + n}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3^n}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1}$;
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2^n}\right)$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5 \cdot 2^n}{4^n + 5^{n+1}}$; h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n)$.

C₁ 6. Să se calculeze:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{n}$;
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1} + \frac{\sqrt{n}+2}{n+3}\right)$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^n$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport

A 1. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general:

a) $x_n = \frac{3n-2}{2+n}$; b) $x_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right)$; c) $x_n = (-1)^n \cdot 7 + \frac{1}{n}$.

2. Să se determine formula termenului de rang n pentru șirul:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$; b) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$; c) $3, -3, 3, -3, \dots$; d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

3.  **Lucrați în perechi!** Să se dea exemple de șiruri numerice:

a) finite; b) infinite; c) monotone.

4. Să se decidă dacă șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, este monoton.

B 5. Să se scrie formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $a_1 = -2$ și $r = -4$; b) $a_1 = 1$ și $r = 2$; c) $a_1 = -10$ și $r = 5$; d) $a_1 = 3$ și $r = 7$.

6. Să se afle suma primilor 100 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $a_1 = 2$, $r = -5$; b) $a_1 = -1$, $r = 1$.

7. Să se scrie formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $b_1 = 2$, $q = 6$; b) $b_1 = -10$, $q = \frac{1}{2}$; c) $b_1 = 3$, $q = 2$.

8.  **Investigați!** Să se decidă dacă este progresie aritmetică sau progresie geometrică șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:

a) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 3x_n$; b) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = 2 + x_n$;
c) $x_1 = -4$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n$; d) $x_1 = -1$, $x_{n+1} = 5 + x_n$.

În caz afirmativ, să se indice formula termenului general al progresiei și rația.

9. Fie numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ în progresie aritmetică. Să se determine:

a) n și S_n , dacă $a_n = 5$, $a_1 = 23$, $r = -2$; b) a_1 și n , dacă $a_n = 18$, $r = 2$, $S_n = 88$.

- C** 10. Fie numerele $b_1, b_2, \dots, b_n$ în progresie geometrică. Să se determine q și S_n , dacă:
- a) $b_n = 1280, b_1 = 5, n = 9$; b) $b_n = 384, q = 2, n = 8$.
11. Un ciclist a parcurs în prima oră o distanță de 8 km. În fiecare oră următoare, el a parcurs o distanță cu 2 km mai mare decât în ora precedentă. În câte ore ciclistul a parcurs distanța de 60 km?
12. În cădere liberă într-o mină, o piatră parcurge în prima secundă 4,9 m și viteza ei crește cu 9,8 m/s. Să se afle adâncimea minei, dacă piatra a ajuns la fund peste 8 s.
13.  **Investigați!** Să se determine valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $2x - 2, x^2 + 1, 3x^2 - 1$ sunt în progresie aritmetică.

Profilul real

- A₁** 1. Aplicând definiția limitei șirului, să se arate că:
- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5n}{n} = -5$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{3n^2} = \frac{2}{3}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{4n+5} = \frac{1}{4}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{1-n} = -5$.
2. Folosind definiția limitei șirului, să se arate că:
- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} \neq \frac{1}{3}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{7n+1} \neq 1$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+1}{3n} \neq \frac{9}{4}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} \neq 1$.
3. Aplicând teorema lui Weierstrass, să se demonstreze convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$, dacă:
- a) $x_n = \frac{3n+1}{2n+1}$; b) $x_n = 1 + \frac{1}{5^n}$; c) $x_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n+1}$.
- B₁** 4. Să se calculeze:
- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2+n}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2n}$;
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+1}$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C_n^2}{2^n}\right)$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
- C₁** 5. Lungimile laturilor unui triunghi sunt în progresie aritmetică cu rația 2. Cosinusul celui mai mic unghi al acestui triunghi este egal cu $\frac{4}{5}$. Să se afle perimetrul triunghiului.
6. Dintr-un vas plin ce conținea 729 l de acid s-au luat a litri, apoi vasul a fost umplut cu apă. După obținerea unei soluții omogene, iarăși s-au luat a litri și vasul a fost umplut din nou cu apă. Această operație a fost repetată de 6 ori și în final soluția din vas conținea 64 l de acid. Să se determine a .
7.  **Lucrați în perechi!** Să se afle suma tuturor numerelor naturale de două cifre care, fiind împărțite la 4, dau restul 1.
8. Să se demonstreze că numerele $(a+x)^2, a^2+x^2, (a-x)^2, a, x \in \mathbb{R}$, sunt în progresie aritmetică. Să se afle suma primilor n termeni ai progresiei, știind că $(a+x)^2$ este primul termen.
9. Să se calculeze:
- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+1}{2^n+1}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2 + 1)$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3n - n^5)$;
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n}$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1}\right)$; f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$;
g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$; i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilurile umanist, arte, sport

1. Scrieți primii 3 termeni ai șirului $(x_n)_{n \geq 1}$:
 a) $x_n = \frac{3n-2}{n+2}$; ③
 b) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{3}$. ③
2. Studiați monotonia șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin formula $x_n = \frac{2n-1}{2n+1}$. ④
3. Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 a_5 = 28$. ⑥
4. Determinați primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 $b_2 - b_1 = -4$, $b_3 - b_1 = 8$. ⑧
5. Pentru a ridica un pian la etajul 2, s-au plătit 3 u.m., iar pentru a-l ridica la fiecare etaj următor – de 2 ori mai mult decât pentru etajul precedent. Determinați la ce etaj a fost ridicat pianul, dacă pentru ultimul etaj s-au plătit 48 u.m. ⑧

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	32–31	30–28	27–24	23–20	19–15	14–10	9–6	5–4	3–2	1–0

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilul real

1. Folosind teorema lui Weierstrass, demonstrați convergența șirului $(x_n)_{n \geq 1}$,

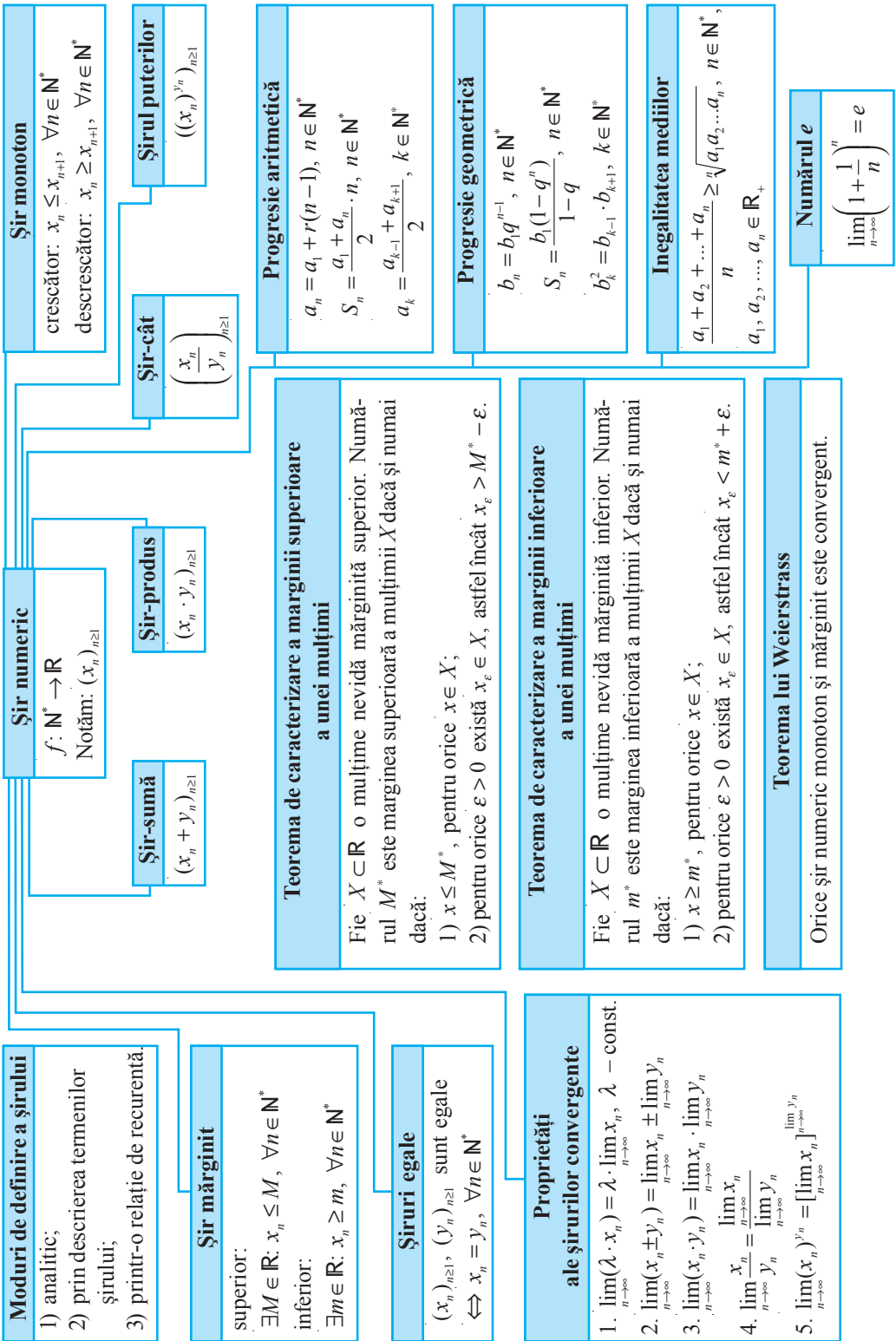
$$x_n = \frac{10 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (n+9)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$$
. ⑧
2. Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$, $a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{72}$. ⑧
3. Determinați primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, dacă:

$$b_4 - b_2 = -\frac{45}{32}, \quad b_6 - b_4 = -\frac{405}{512}$$
. ⑨
4. Pentru confecționarea și instalarea inelului de jos al unei fântâni s-au plătit 26 u.m., iar pentru fiecare inel următor – cu 2 u.m. mai puțin decât pentru cel precedent. Suplimentar, s-au mai plătit 40 u.m. Prețul mediu pentru confecționarea și instalarea unui inel este de $22\frac{4}{9}$ u.m. Aflați câte inele au fost instalate. ⑨

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	34–33	32–30	29–26	25–21	20–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0

Șiruri de numere reale



Obiective

- ⇒ *determinarea punctelor de acumulare și a punctelor izolate ale unei mulțimi;
- ⇒ *aplicarea în diverse contexte a limitei funcției într-un punct, *aplicarea în rezolvări de probleme a limitelor laterale ale funcției, *identificarea funcțiilor care au limită și care nu au limită în punct;
- ⇒ *calculul limitelor de funcții elementare și a limitelor de funcții compuse, *utilizarea în rezolvări de probleme a operațiilor cu limite de funcții;
- ⇒ *aplicarea limitelor remarcabile la calculul limitelor de funcții; *recunoașterea în diverse contexte a formelor exceptate și aplicarea metodelor de înlăturare a acestora.

§1 Limita unei funcții într-un punct**1.1. Puncte de acumulare ale unei mulțimi**

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$ o submulțime de numere reale și $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. În acest modul vom studia comportarea funcției f în vecinătatea unui punct x_0 , care, în caz general, nu aparține în mod necesar mulțimii E . Mai precis, vom studia ce se întâmplă cu valorile $f(x)$ ale funcției f dacă valorile argumentului x , $x \neq x_0$, sunt din ce în ce mai aproape de x_0 . Pentru ca argumentul $x \in E$ să se poată apropia suficient de mult de x_0 , este necesar ca în orice vecinătate a lui x_0 să existe puncte din mulțimea E , adică x_0 să fie punct de acumulare pentru E .

Definiție. Fie $E \subseteq \mathbb{R}$. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ se numește **punct de acumulare** pentru mulțimea E dacă în orice vecinătate a lui x_0 există cel puțin un punct din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$.

Deci, $x_0 \in \mathbb{R}$ este un **punct de acumulare** pentru mulțimea E dacă pentru orice vecinătate V a punctului x_0 are loc relația $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Prin urmare, $x_0 \in \mathbb{R}$ **nu este punct de acumulare** pentru mulțimea E dacă există o vecinătate V' a lui x_0 care nu conține niciun punct din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$, adică $V' \cap (E \setminus \{x_0\}) = \emptyset$. Punctul $x_0 \in E$, care nu este punct de acumulare pentru E , se numește **punct izolat** al mulțimii E . Mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$ se numește **mulțime închisă** dacă ea își conține toate punctele de acumulare. Mulțimea mărginită și închisă se numește **mulțime compactă**.

Teorema 1. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$ dacă și numai dacă există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Demonstrație

Necesitatea. Să admitem că x_0 este punct de acumulare pentru mulțimea E și să considerăm vecinătățile $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ale punctului x_0 . Atunci în fiecare vecinătate V_n se află cel puțin un punct $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$, adică $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$, de unde rezultă că $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ pentru orice $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Suficiența. Dacă mulțimea E conține un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termeni x_n , $x_n \neq x_0$, astfel încât $x_n \rightarrow x_0$ când $n \rightarrow \infty$, atunci din definiția limitei șirului numeric rezultă că pentru orice vecinătate V a lui x_0 toți termenii x_n ai acestui șir aparțin vecinătății V începând cu un rang N . Prin urmare, $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, adică x_0 este punct de acumulare pentru E . ►

Observație. Definiția punctului de acumulare și teorema 1 rămân adevărate și pentru cazurile în care x_0 este $+\infty$, $-\infty$ sau ∞ . În aceste cazuri, în demonstrația teoremei 1 se vor considera, respectiv, vecinătățile $V_n = (n, +\infty)$, $V_n = (-\infty, -n)$ sau $V_n = (-\infty, -n) \cup (n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Exemple

1. Pentru $E = (a, b)$ sau $E = [a, b]$ orice punct $x_0 \in [a, b]$ este punct de acumulare.
2. Mulțimea $\mathbb{N}$ are punctul de acumulare $+\infty$. Toate punctele mulțimii $\mathbb{N}$ sunt pentru ea puncte izolate.
3. Mulțimea $E = [-2, 1] \cup \{3\}$ are în calitate de puncte de acumulare orice punct $x_0 \in [-2, 1]$, iar punctul $x_0 = 3$ este pentru ea un punct izolat.
4. Punctele 0 și 1 sunt puncte de acumulare pentru mulțimea $E = \left\{-1, 2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$, fiindcă această mulțime conține șirurile $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n = -\frac{1}{n}$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n = 1 + \frac{1}{n}$, pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = 1$, iar $x'_n \neq 0$, $x''_n \neq 1$, $\forall n \geq 1$. Toate punctele $x_0 \in E$ sunt pentru această mulțime puncte izolate.

1.2. Limita unei funcții într-un punct

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E și $l \in \mathbb{R}$. În cele ce urmează vom da un sens riguros afirmației: *Dacă valorile argumentului x se apropie de x_0 , atunci valorile $f(x)$ ale funcției f se apropie de l .*

Pentru început, să examinăm câteva

Exemple

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2}$, și punctul $x_0 = 2$ (fig. 2.1).

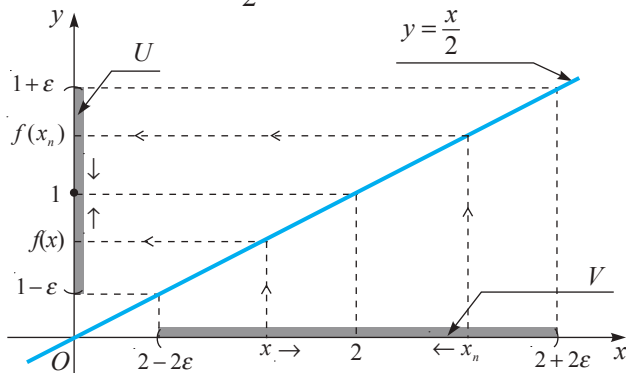


Fig. 2.1

În figura 2.1 observăm că dacă valorile argumentului x se apropie suficient de mult de $x_0 = 2$, atunci valorile $f(x)$ ale funcției f se apropie oricât de mult de $l = 1$.

Această situație poate fi redată în mai multe moduri.

De exemplu, intuitiv dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este un șir arbitrar și convergent la $x_0 = 2$, atunci șirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$, unde $f(x_n) = \frac{x_n}{2}$, converge la $l = 1$ (fig. 2.1).

Sau în alt mod: pentru orice vecinătate $U = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, centrată în punctul $l = 1$ al axei Oy , există o vecinătate $V = (2 - 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, cu centrul în punctul $x_0 = 2$ al axei Ox , astfel încât pentru orice $x \in V$ rezultă că $f(x) \in U$ (fig. 2.1).

2. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, care nu este definită în punctul 1. Pentru orice $x \neq 1$, cu $x \rightarrow 1$ (ce tinde la 1), obținem că $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \rightarrow 2$ (tinde la 2) (fig. 2.2).

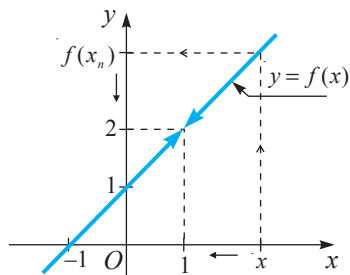


Fig. 2.2

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ x + 1, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$

și punctul $x_0 = 1$ (fig. 2.3). Din reprezentarea grafică a funcției f constatăm: dacă argumentul x ia valori tot mai aproape de $x_0 = 1$, dar mai mari decât 1, atunci valorile funcției f se apropie de $l = 2$; dacă însă argumentul x ia valori tot mai aproape de $x_0 = 1$, dar mai mici decât 1, atunci valorile funcției f se apropie de $l = 0$. Prin urmare, nu există un număr $l \in \mathbb{R}$ de care valorile funcției f se apropie atunci când valorile argumentului x sunt aproape de $x_0 = 1$.

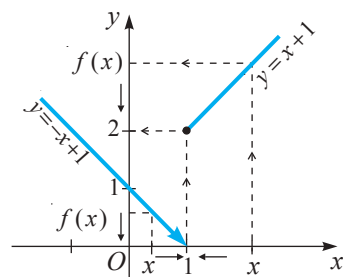


Fig. 2.3

Așadar, în cazul exemplului 1 (exemplului 2) se spune că numărul $l=1$ (respectiv numărul $l=2$) este limita funcției f în punctul $x_0=2$ (respectiv în punctul $x_0=1$), iar în cazul exemplului 3 se spune că funcția f nu are limită în punctul $x_0=1$.

Situațiile examinate în aceste exemple conduc la următoarele două definiții ale limitei unei funcții într-un punct.

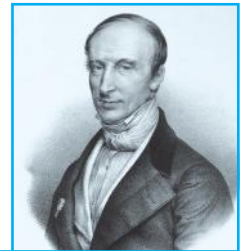
Fie $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) o funcție și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E .

Definiție (în limbajul vecinătăților). Se spune că **funcția f are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul x_0** dacă pentru orice vecinătate U a punctului l există o vecinătate V a punctului x_0 , astfel încât oricare ar fi $x \in V \cap (E \setminus \{x_0\})$ rezultă că $f(x) \in U$.

Limita funcției f în punctul x_0 se notează $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ sau $f(x) \rightarrow l$ când $x \rightarrow x_0$ și se citește: *Limita funcției f când x tinde la x_0 este egală cu l sau $f(x)$ tinde la l când x tinde la x_0 .*

În definiția limitei unei funcții într-un punct, vecinătățile punctului l pot fi considerate de forma $U = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - l| < \varepsilon\} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, iar vecinătățile punctului x_0 – de forma $V = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, și este evident că, în caz general, V depinde de U . Deci, δ depinde de ε , adică $\delta = \delta(\varepsilon)$. Prin urmare, definiția limitei unei funcții într-un punct poate fi formulată, în mod echivalent, cu ajutorul inegalităților numerice.

Definiție (Cauchy¹, sau în limbajul $\varepsilon - \delta$). Se spune că **funcția f are limita $l \in \mathbb{R}$ în punctul x_0** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$, inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|f(x) - l| < \varepsilon$.



Augustin Louis Cauchy

Noțiunea de limită $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a unei funcții f într-un punct x_0 se extinde și pentru cazul în care una sau ambele valori x_0, l nu sunt finite. Prezentăm unele dintre aceste definiții.

Definiții (Cauchy)

1. Se spune că limita funcției f în punctul x_0 este $+\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$, inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $f(x) > \varepsilon$. Se notează: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

¹ Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – matematician francez.

Cu ajutorul cuantificatorilor $\exists, \forall$, definiția 1 se scrie concis astfel:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a.î. (astfel încât) $\forall x \in E \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

2. Se spune că limita funcției f în punctul x_0 este ∞ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$, inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|f(x)| > \varepsilon$. Se notează: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Concis, definiția 2 se scrie astfel: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) dacă $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a.î. $\forall x \in E \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a.î. $\forall x \in E, x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a.î. $\forall x \in E, |x| > \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, a.î. $\forall x \in E, x > \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

Observații. 1. Pentru $x_0, l \in \mathbb{R}$, definițiile limitei unei funcții într-un punct (în limbajele vecinătăților și ε - δ) au următoarea interpretare geometrică: pentru valori ale argumentului x suficient de apropiate de x_0 , valorile respective $f(x)$ ale funcției f sunt oricât de mult apropiate de l (fig. 2.4).

2. Pentru funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = a_n$, definițiile 3 și 5 (Cauchy) ale limitei unei funcții într-un punct reprezintă definiția limitei unui șir numeric cu limită finită sau infinită.

3. Se poate demonstra că dacă există două șiruri $(x'_n)_{n \geq 1}$ și $(x''_n)_{n \geq 1}$ din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$, astfel încât șirurile respective $(f(x'_n))_{n \geq 1}$ și $(f(x''_n))_{n \geq 1}$ au limite diferite sau nu au limită, atunci funcția f nu are limită în punctul x_0 .

Observația 3 este deseori aplicată pentru a demonstra că o funcție f nu are limită în x_0 .

4. Se poate demonstra că dacă există limita unei funcții într-un punct, atunci această limită este unică.

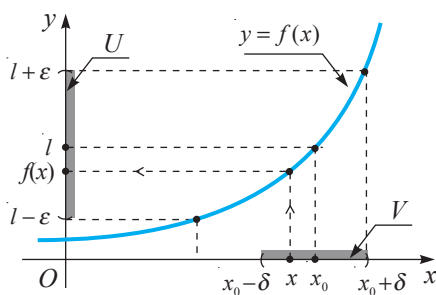


Fig. 2.4

Fiecare dintre exercițiile următoare a fost rezolvat cu ajutorul definiției limitei unei funcții într-un punct, adecvate enunțului respectiv.

Exerciții rezolvate

❖ 1. Să se arate, aplicând definiția în limbajul vecinătăților a limitei unei funcții într-un

punct, că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1 \\ 2x + 1, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$ are limită în punctul $x_0 = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

Rezolvare:

Fie $U = (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, o vecinătate arbitrară a punctului $l = 3$.

Dacă $x < 1$, atunci

$$f(x) = 3x \in U \Leftrightarrow 3 - \varepsilon < 3x < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow x \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Dacă însă $x > 1$, atunci

$$f(x) = 2x + 1 \in U \Leftrightarrow 3 - \varepsilon < 2x + 1 < 3 + \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x \in \left(1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Fie $V = \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)$ vecinătatea punctului $x_0 = 1$, $V \subset \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Din $x \in V$, $x \neq 1$, rezultă că $x \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1\right)$ sau $x \in \left(1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, de unde obținem că $f(x) \in U$.

Așadar, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

❖ 2. Se consideră funcția $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Folosind definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

Rezolvare:

$\forall \varepsilon > 0$ și $\forall x \in [-1, 3]$ avem $|x| \leq 3$ și $|f(x) - 5| = |3x^2 - 4x - 4| = |(x - 2)(3x + 2)| \leq |x - 2|(3|x| + 2) \leq 11|x - 2| < \varepsilon$, dacă $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{11}$. Așadar, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\left(\delta = \frac{\varepsilon}{11}\right)$, astfel încât $\forall x \in [-1, 3] \setminus \{2\}$ cu $|x - 2| < \delta$, avem $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

❖ 3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$. Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$.

Rezolvare:

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Considerând orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, obținem $|f(x)| > \varepsilon \Leftrightarrow |x + 1|^3 < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x + 1| < \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Deci, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\left(\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right)$, astfel încât $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ cu $|x + 1| < \delta$, avem $|f(x)| > \varepsilon$ și, în baza definiției Cauchy, rezultă că $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$.

❖ 4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2}$. Să se arate că $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$.

Rezolvare:

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Atunci $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2} = \frac{(2x + 1)(x + 2)}{x + 2} = 2x + 1 \in (-3 - \varepsilon, -3 + \varepsilon) = U$ dacă și

numai dacă $-3 - \varepsilon < 2x + 1 < -3 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < 2x + 4 < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x + 2 < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in V = \left(-2 - \frac{\varepsilon}{2}, -2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Deci, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$.

❖ 5. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \frac{1}{x}$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$. Să se arate, folosind observația 3, că nu există limitele $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Rezolvare:

Funcția f nu are limită în punctul $x_0 = 0$, deoarece există cel puțin două șiruri $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n = \frac{1}{2n\pi}$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi}$, care au limita zero când $n \rightarrow \infty$, însă șirurile respective $(f(x'_n))_{n \geq 1}$, $f(x'_n) = 1$, și $(f(x''_n))_{n \geq 1}$, $f(x''_n) = -1$, au limite diferite: 1 și respectiv -1. Similar, funcția g nu are limită la plus infinit, fiindcă șirurile $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n = n\pi$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, au limita plus infinit, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n) = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x''_n) = 1$.

1.3. Limite laterale

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E . Să admitem că x_0 este punct de acumulare și pentru mulțimea $E_- = E \cap (-\infty, x_0)$ sau pentru mulțimea $E_+ = E \cap (x_0, +\infty)$. În acest caz se spune că x_0 **este punct de acumulare la stânga** sau **punct de acumulare la dreapta pentru mulțimea E** .

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare la stânga (la dreapta) pentru mulțimea E . Dacă valorile lui x se apropie de x_0 din stânga (respectiv din dreapta) cu valori $x < x_0$ (respectiv $x > x_0$), se scrie $x \rightarrow x_0 - 0$ (respectiv $x \rightarrow x_0 + 0$). Pentru $x_0 = 0$, în aceste cazuri se scrie $x \rightarrow -0$ (respectiv $x \rightarrow +0$).

Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ x + 1, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases}$ considerată în secvența 1.2,

am observat că nu există un număr $l \in \mathbb{R}$ de care valorile $f(x)$ să se apropie în timp ce valorile argumentului x sunt suficient de aproape de 1. Dacă însă valorile argumentului x se apropie de 1 din stânga (prin valori $x < 1$), atunci valorile $f(x) = -x + 1$ se apropie de 0, iar dacă valorile argumentului x se apropie de 1 din dreapta (prin valori $x > 1$), atunci valorile $f(x) = x + 1$ se apropie de 2. Deci, funcția f nu are limită în punctul 1, însă se spune că ea are limite laterale în acest punct.

În definițiile care urmează, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) este o funcție, iar $x_0 \in \mathbb{R}$ – un punct de acumulare la stânga (la dreapta) pentru mulțimea E .

Definiție. Se spune că numărul $l_s = l_s(x_0) \in \mathbb{R}$ este **limita la stânga a funcției f în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice vecinătate U a lui l_s există o vecinătate V a lui x_0 , astfel încât oricare ar fi $x \in V \cap E_-$ rezultă că $f(x) \in U$.

Definiție. Se spune că numărul $l_d = l_d(x_0) \in \mathbb{R}$ este **limita la dreapta a funcției f în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice vecinătate U a lui l_d există o vecinătate V a lui x_0 , astfel încât oricare ar fi $x \in V \cap E_+$ rezultă că $f(x) \in U$.

Numerele $l_s(x_0)$ și $l_d(x_0)$ se numesc **limite laterale ale funcției f în punctul x_0** și se folosesc notațiile

$$l_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x), \quad l_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

sau

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x), \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$$

(fig. 2.5).

Pentru $x_0 = 0$, în aceste cazuri se scrie:

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(-0), \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(+0).$$

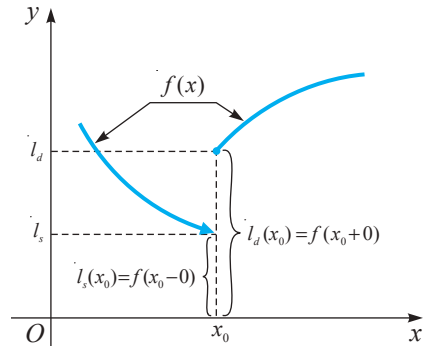


Fig. 2.5

Menționăm că definițiile limitelor laterale pot fi formulate și în limbajul Cauchy. Vom prezenta doar enunțul uneia dintre aceste definiții, celelalte fiind propuse ca exerciții.

Definiție (Cauchy). Se spune că numărul $l_d \in \mathbb{R}$ este **limita la dreapta a funcției f în punctul $x_0 \in \mathbb{R}$** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E$, inegalitatea dublă $x_0 < x < x_0 + \delta$ implică $|f(x) - l_d| < \varepsilon$.

Observație. Ca și în cazul limitelor de funcții, limitele laterale l_s și l_d pot fi infinite ($+\infty$, $-\infty$ sau ∞). Definițiile acestor concepte pot fi formulate în cele două limbaje echivalente. Prezentăm doar una dintre aceste definiții.

Definiție (Cauchy). Se spune că $-\infty$ este **limita la dreapta a funcției f în punctul x_0** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E$, inegalitatea dublă $x_0 < x < x_0 + \delta$ implică $f(x) < -\varepsilon$.

Se notează: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = -\infty$.

Un criteriu util de existență a limitei unei funcții într-un punct este formulat în

Teorema 2 (criteriul în limbajul limitelor laterale). Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimile E_- și E_+ . Funcția f are limită în punctul x_0 dacă și numai dacă funcția f are în x_0 limite laterale egale: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. În acest caz, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Demonstrație

Necesitatea. Dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, atunci, în baza definiției, există și limitele laterale $f(x_0 - 0) = l$ și $f(x_0 + 0) = l$.

Suficiența. Să presupunem că există limitele laterale $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ și $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$, $l \in \mathbb{R}$. Din definiția Cauchy a limitelor laterale ale unei funcții într-un punct rezultă: $(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = l \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = l) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0, \text{ astfel încât } \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \text{ dacă } x_0 - \delta_1 < x < x_0 \text{ sau } x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.

Fie $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Evident, $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta \Rightarrow (x_0 - \delta_1 < x < x_0 \text{ sau } x_0 < x < x_0 + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Similar se demonstrează și cazul în care limita l este infinită. ►

Exerciții rezolvate

❖ 1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$. Să se determine limitele laterale ale funcției f în punctul $x_0 = 2$. Are limită funcția f în punctul $x_0 = 2$?

Rezolvare:

Folosind definiția Cauchy a limitei funcției, obținem $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = 6$ și $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 7$.

În baza definiției limitelor laterale și a teoremei 2 vom avea: dacă $x < 2$, atunci $f(x) = x^2 + x$ și, prin urmare, $f(2 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = 6$, iar dacă $x > 2$, atunci $f(x) = 2x + 3$, deci $f(2 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2x + 3) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 7$.

Cum $f(2 - 0) \neq f(2 + 0)$, în baza teoremei 2, funcția f nu are limită în punctul $x_0 = 2$.

❖ 2. Să se determine valorile parametrului real a pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a^2, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \\ 3ax + 1, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$, are limită cel puțin în unul dintre punctele -1 și 1 . Care este valoarea acestei limite?

Rezolvare:

Pentru orice $x \in (-1, 1)$ avem $f(x) = x^2 + a^2$, deci $l_s(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 + a^2) = 1 + a^2$, $l_d(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x^2 + a^2) = 1 + a^2$. În mod analog, pentru orice $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ obținem că $f(x) = 3ax + 1$, deci $l_s(-1) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (3ax + 1) = 1 - 3a$, $l_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (3ax + 1) = 1 + 3a$.

Astfel, funcția f are limită în punctul $x_0 = -1$ dacă: $l_s(-1) = l_d(-1) \Leftrightarrow 1 + a^2 = 1 - 3a \Leftrightarrow a \in \{-3, 0\}$. Dacă $a = 0$, atunci $l_s(-1) = l_d(-1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$, iar dacă $a = -3$, atunci $l_s(-1) = l_d(-1) = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 10$.

Similar, funcția f are limită în punctul $x_0 = 1$ dacă: $l_s(1) = l_d(1) \Leftrightarrow 1 + a^2 = 1 + 3a \Leftrightarrow a \in \{0, 3\}$. Pentru $a = 0$ avem $l_s(1) = l_d(1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, iar pentru $a = 3$ obținem că $l_s(1) = l_d(1) = 10 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 10$.

Așadar, pentru $a = 0$ funcția f are limită în ambele puncte, -1 și 1 , iar pentru $a \in \{-3, 3\}$ ea are limită numai în unul dintre aceste puncte.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se arate că punctul $x_0 = 2$ este punct de acumulare pentru mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$:

$$\text{a) } E = \left\{ \frac{2n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}; \quad \text{b) } E = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}; \quad \text{c) } E = \left\{ \frac{4n+3}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2. Să se arate că punctul $x_1 \in E$ ($n = 1$), unde E este mulțimea din exercițiul 1, este un punct izolat pentru E .

3. Aplicând definiția în limbajul vecinătăților a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) &= 2; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2}x - 3 \right) &= -2; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) &= -\frac{1}{2}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} (1-2x) &= 3; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) &= -1; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} x^2 &= 1. \end{aligned}$$

4. Să se demonstreze, utilizând definiția în limbajul $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții într-un punct, că:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (2-3x) = 5; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{3}x - 3 \right) = -1; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}) = 2.$$

5. Folosind proprietățile șirurilor convergente, să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \frac{2x^3 - 3x + 5}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 1; & \text{b) } f(x) &= \frac{2x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 5x - 2}, \quad x_0 = -2; \\ \text{c) } f(x) &= \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4x - 5}, \quad x_0 = -1. \end{aligned}$$

B₁ 6. Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimea:

$$\text{a) } E = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \quad \text{b) } E = \left\{ \frac{n}{n+3} (3 + (-1)^n) \mid n \in \mathbb{N} \right\}; \quad \text{c) } E = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

7. Să se indice cel puțin un șir numeric din E care are ca limită punctul de acumulare x_0 pentru mulțimea E :

$$\text{a) } E = \mathbb{R} \setminus [0, 4), \quad x_0 = 4; \quad \text{b) } E = \left\{ \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad x_0 \in \{-1, 1\}.$$

8.  **Lucrați în perechi!** Să se demonstreze, folosind definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, că:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 5x + 3) = 1; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+7}{x+3} = 1; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2.$$

9. Să se arate că nu există limita:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{1}{x-1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sin^2 \pi x; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x}.$$

10. Să se calculeze în punctul specificat x_0 limitele laterale ale funcției $f: D^1 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{dacă } x \leq 2 \\ x^2+x, & \text{dacă } x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2; \quad \text{b) } f(x) = \frac{3x^2+4x+1}{x^2-1}, \quad x_0 \in \{-1, 1\}.$$

11. Să se decidă dacă funcția f are limită în punctul specificat x_0 și să se calculeze $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, știind că $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^3-2x, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 \in \{0, 1\}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2-4}{2-x}, \quad x_0 \in \{0, 2\}.$$

C₁ 12.  **Investigați!** Să se cerceteze, în punctele specificate x_k , $k \in \mathbb{Z}$, existența limitei funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: a) $f(x) = \text{sgn}(\sin x)$, $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; b) $f(x) = [x]$, $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: a) $f(x) = x - [x]$;

$$\text{b) } f(x) = [\cos x];$$

$$\text{c) } f(x) = \sigma(\sin x), \text{ unde } \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases} \text{ este funcția Heaviside (treapta unitate).}$$

Să se schițeze graficul funcției f și să se determine punctele $x_0 \in \mathbb{R}$ în care există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

14.  **Investigați!** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} (ax+1)^2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ ax+3, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1; \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & \text{dacă } x < 2 \\ x-a, & \text{dacă } x \geq 2, \end{cases} \quad x_0 = 2.$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât să existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și să se calculeze această limită.

$$15. \text{ Fie } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a^2x - x^2, & \text{dacă } x < -2 \\ -6, & \text{dacă } x = -2 \\ 3ax, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$$

Pentru care valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$ există $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$?

§2 Operații cu limite de funcții.

Limitele unor funcții elementare

2.1. Operații cu limite de funcții

Să determinăm operațiile ce pot fi efectuate cu limite de funcții. Vom prezenta demonstrațiile doar pentru unele dintre aceste operații, celelalte demonstrații fiind propuse ca exerciții.

Fie E o submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$, x_0 un punct de acumulare finit sau infinit pentru mulțimea E și $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funcții pentru care există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, unde limitele a și b sunt finite. Sunt adevărate **propozițiile**:

① Dacă funcția f are limită în punctul x_0 și $c \in \mathbb{R}$, atunci și funcția $c \cdot f$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = ca = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Prin urmare, *factorul constant poate fi extras de sub semnul limitei*.

Observație. Dacă în propoziția ① se consideră că $f(x) = 1$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$. Deci, limita în orice punct x_0 a unei constante este însăși constanta.

¹ Aici și în continuare mulțimea D se consideră domeniul maxim de definiție al funcției.

② Dacă funcțiile f, g au limită în punctul x_0 , atunci și funcția $f \pm g$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ – *limita sumei (diferenței) de funcții este egală cu suma (diferența) limitelor acestor funcții.*

Demonstrație

Din definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct rezultă ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$) $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \text{ astfel încât } \forall x \in E \setminus \{x_0\}, \text{ dacă } |x - x_0| < \delta_1 \text{ și } |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$. Deci, $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$ inegalitatea $|x - x_0| < \delta$, unde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, implică inegalitatea $|f(x) \pm g(x) - (a \pm b)| = |(f(x) - a) \pm (g(x) - b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Prin urmare, conform definiției Cauchy, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$. ►

③ Dacă funcțiile f și g au limită în punctul x_0 , atunci și funcția $f \cdot g$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ – *limita produsului de funcții este egală cu produsul limitelor acestor funcții.*

Propozițiile ② și ③ sunt adevărate și pentru un număr finit $f_1, f_2, \dots, f_n$ de funcții care au limită în punctul x_0 . În particular, din propoziția ③, pentru $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$, se obține $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

④ Dacă funcțiile f și g au limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$, atunci câtul $\frac{f(x)}{g(x)}$ este definit pe o vecinătate a punctului x_0 din mulțimea $E \setminus \{x_0\}$, funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ – *limita câtului a două funcții este egală cu câtul limitelor acestor funcții.*

⑤ Dacă funcțiile f și g au limită în punctul x_0 și $f(x) > 0$ pentru orice $x \in E$, atunci și funcția $f^g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $(f^g)(x) = [f(x)]^{g(x)}$ are limită în punctul x_0 (cu excepția cazului 0^0) și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = a^b = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Condițiile de existență a limitei pentru funcții compuse sunt formulate în propoziția ⑥.

⑥ Fie E și F submulțimi nevide din $\mathbb{R}$, x_0 un punct de acumulare pentru E , funcțiile $u: E \rightarrow F$, $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ și funcția compusă $f \circ u: E \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ u)(x) = f(u(x))$, $\forall x \in E$.

Dacă 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$,

2) $u(x) \neq u_0$ pentru orice x dintr-o vecinătate din E a lui x_0 și $x \neq x_0$,

3) $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$,

atunci funcția compusă $f \circ u$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$.

Observații. 1. Egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$, stabilită în propoziția ⑥, argumentează un procedeu general numit **metoda substituției** sau **metoda schimbării de variabilă** la calculul limitelor de funcții. Într-adevăr, membrul din dreapta al egalității se obține din membrul din stânga dacă se efectuează notația $u = u(x)$, numită **substituție** sau **schimbare de variabilă**, și se ține cont de ipotezele 1) și 2) ale propoziției ⑥ că $u \rightarrow u_0$ și $u \neq u_0$.

2. Operațiile cu limite de funcții sunt valabile și pentru limite laterale.

Propozițiile ①–⑤ sunt adevărate și în unele cazuri în care una sau ambele funcții f și g au limită infinită în punctul x_0 sau când pentru câtul $\frac{f}{g}$ avem $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

De exemplu, să presupunem că $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ și să demonstrăm că în acest caz funcția $f + g$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

Conform definiției Cauchy a limitei unei funcții într-un punct, avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0, \forall x \in E \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon; \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta_2(M) > 0, \forall x \in E \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > M - (a - \varepsilon). \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că pentru orice $M > 0$, $\exists \delta = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(M)) > 0$, astfel încât oricare ar fi $x \in E \setminus \{x_0\}$ inegalitatea $|x - x_0| < \delta$ implică $|x - x_0| < \delta_1$ și $|x - x_0| < \delta_2$, care, la rândul lor, implică

$$f(x) + g(x) > (a - \varepsilon) + M - (a - \varepsilon) = M.$$

În baza definiției Cauchy a limitei funcției în punct, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

Simbolic, acest rezultat se notează $a + (+\infty) = +\infty$ și se numește **formă neexceptată**, **formă determinată** sau, simplu, **determinare**.

În mod similar pot fi demonstrate și formele neexceptate:

$$a + (-\infty) = -\infty; \quad a + \infty = \infty; \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty; \quad a \cdot (+\infty) = +\infty \quad (a > 0);$$

$$a \cdot (-\infty) = -\infty \quad (a < 0); \quad \frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0) \text{ etc.}$$

În cazul în care $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, despre existența limitei funcției

$f + g$ sau a funcției $\frac{f}{g}$ în punctul x_0 nu ne putem pronunța.

Simbolic, acest rezultat se notează $\infty - \infty$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ și se numește **formă exceptată**, **formă nedeterminată** sau, simplu, **nedeterminare** (o expunere mai detaliată a acestor cazuri se va efectua în §4).

Așadar, operațiile cu limite de funcții pot avea sau nu pot avea sens. Aceste operații conduc la apariția așa-numitelor **forme neexceptate (determinări)** și **forme exceptate (nedeterminări)**.

Tabelul formelor neexceptate

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci:

$$1. \infty + a = \infty$$

$$2. (+\infty) + a = +\infty$$

$$3. (-\infty) + a = -\infty$$

$$4. (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$5. (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$6. a \cdot \infty = \infty \quad (a \neq 0)$$

$$7. a \cdot (+\infty) = +\infty \quad (a > 0)$$

$$8. a \cdot (-\infty) = -\infty \quad (a > 0)$$

$$9. a \cdot (+\infty) = -\infty \quad (a < 0)$$

$$10. a \cdot (-\infty) = +\infty \quad (a < 0)$$

$$11. (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$12. (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$13. (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$14. \infty \cdot \infty = \infty$$

$$15. \frac{a}{\infty} = 0$$

$$16. \frac{\infty}{a} = \infty$$

$$17. \frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0)$$

$$18. a^{+\infty} = +\infty \quad (a > 1)$$

$$19. a^{-\infty} = 0 \quad (a > 1)$$

$$20. a^{+\infty} = 0 \quad (0 < a < 1)$$

$$21. a^{-\infty} = +\infty \quad (0 < a < 1)$$

$$22. (+\infty)^a = +\infty \quad (a > 0)$$

$$23. (+\infty)^a = 0 \quad (a < 0)$$

$$24. 0^{+\infty} = 0$$

$$25. (+\infty)^{+\infty} = +\infty$$

$$26. (+\infty)^{-\infty} = 0.$$

Tabelul formelor exceptate

$$1. \frac{\infty}{\infty}$$

$$2. \frac{0}{0}$$

$$3. 0 \cdot \infty$$

$$4. \infty - \infty$$

$$5. 1^\infty$$

$$6. 0^0$$

$$7. \infty^0$$

Exemple

Din definiția limitei unei funcții într-un punct rezultă că $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, unde $x_0 \in \mathbb{R}$.

Prin urmare, în baza propozițiilor ①–⑥ obținem:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2) = 3(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 2 = 2;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} [(x+3) \cdot (3x^2 - 4x - 2)] = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2) = 5 \cdot 2 = 10;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 2}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)} = \frac{2}{5};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2)^{(x+3)} = \left[\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x - 2) \right]^{\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)} = 2^5 = 32;$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -1} [3(x+3)^2 - 4(x+3) - 2] = \lim_{u \rightarrow 2} (3u^2 - 4u - 2) = 2 \quad (u = x+3 \rightarrow 2 \text{ când } x \rightarrow -1).$$

2.2. Limitele funcțiilor elementare

În cele ce urmează vom studia limitele unor funcții elementare, funcții care se folosesc la descrierea în limbaj matematic a diverselor procese din natură. Vom prezenta, fără demonstrație, relațiile de calcul al limitelor de funcții respective. Aceste rezultate pot fi deduse direct utilizând definiția Cauchy a limitei unei funcții într-un punct.

I. Funcția putere cu exponent natural $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (fig. 2.6)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

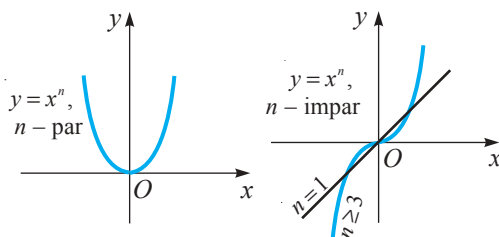


Fig. 2.6

II. Funcția putere cu exponent întreg negativ

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ (fig. 2.7)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \infty, & \text{dacă } n \text{ este impar;} \end{cases}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^n} = +\infty$;
- e) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\infty, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

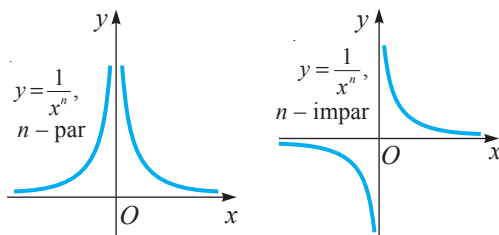


Fig. 2.7

III. Funcția polinomială

$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$;	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_0 x^n$;
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_0 x^n$;	d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_0 x^n$.

Example

- $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x + 2) = 3 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 2 = 3$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 5x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 100x^4 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5) = +\infty$.

IV. Funcția rațională

Fie P și Q două funcții polinomiale cu coeficienți reali definite, respectiv, prin:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \text{ și } Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \quad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Funcția $\frac{P}{Q}: E \rightarrow \mathbb{R}$, unde $E = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$, se numește **funcție rațională**.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \forall x_0 \in E;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } n > m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } n = m \\ 0, & \text{dacă } n < m. \end{cases}$$

Dacă $x \rightarrow +\infty$ sau $x \rightarrow -\infty$, atunci în b) se mai specifică și semnul expresiei $\frac{a_0}{b_0} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m}$. Cazul $Q(x_0) = 0$ se va examina în § 4.

Example

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3}{-x^2 + 6x - 2} = \frac{2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3}{-2^2 + 6 \cdot 2 - 2} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 + 3x + 1}{4x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} x^3 \right) = +\infty.$$

V. Funcția radical

❶ $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, n - par (fig. 2.8)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad x_0 \in [0, +\infty);$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad n - \text{par}.$$

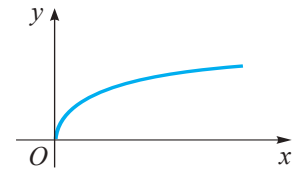


Fig. 2.8

❷ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, n - impar (fig. 2.9)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \quad n - \text{impar};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad n - \text{impar};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty, \quad n - \text{impar}.$$

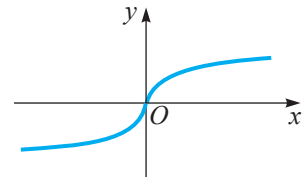


Fig. 2.9

VI. Funcția exponențială

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (fig. 2.10)

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, $x_0 \in \mathbb{R}$;

b) dacă $a > 1$, atunci: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$;

c) dacă $0 < a < 1$, atunci: $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$;

d) nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$.

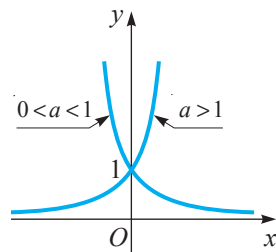


Fig. 2.10

VII. Funcția logaritmică

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (fig. 2.11)

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $x_0 > 0$;

b) dacă $a > 1$, atunci: $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$;

c) dacă $0 < a < 1$, atunci: $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.

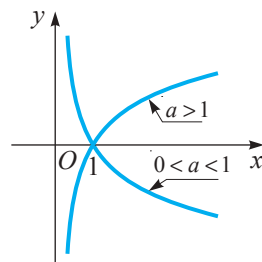


Fig. 2.11

VIII. Funcția putere cu exponent real

$f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (fig. 2.12)

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$, $x_0 > 0$;

b) $\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$;

c) $\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha = +\infty$.

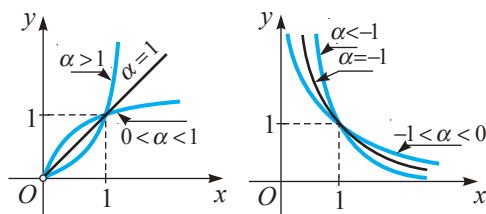


Fig. 2.12

IX. Funcții trigonometrice

① **Funcția sinus** $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ (fig. 2.13)

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;

b) nu există: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$.

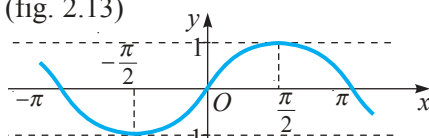


Fig. 2.13

② **Funcția cosinus** $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ (fig. 2.14)

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;

b) nu există: $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$.

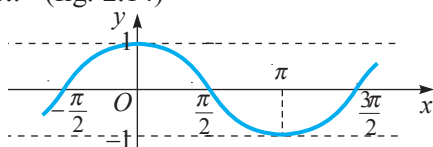


Fig. 2.14

③ Funcția tangentă

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tg} x \quad (\text{fig. 2.15})$$

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad x_0 \neq \alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$
 b) $\lim_{x \rightarrow \alpha_k - 0} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha_k + 0} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad k \in \mathbb{Z}.$

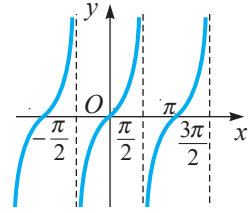


Fig. 2.15

④ Funcția cotangentă

$$f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{ctg} x \quad (\text{fig. 2.16})$$

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, \quad x_0 \neq \beta_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$
 b) $\lim_{x \rightarrow \beta_k - 0} \operatorname{ctg} x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \beta_k + 0} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad k \in \mathbb{Z}.$

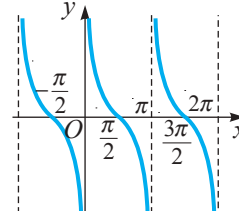


Fig. 2.16

X. Funcții trigonometrice inverse

① Funcția arcsinus

$$f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \arcsin x \quad (\text{fig. 2.17})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad x_0 \in [-1, 1].$$

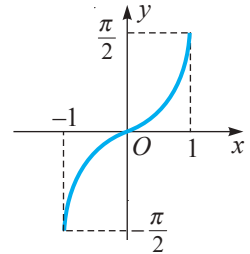


Fig. 2.17

② Funcția arccosinus

$$f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad f(x) = \arccos x \quad (\text{fig. 2.18})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 \in [-1, 1].$$

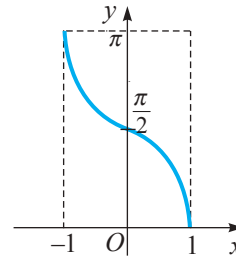


Fig. 2.18

③ Funcția arctangentă

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f(x) = \operatorname{arctg} x \quad (\text{fig. 2.19})$$

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R};$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2};$
 c) nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x.$

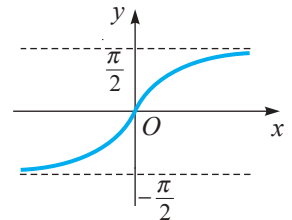


Fig. 2.19

4 Funcția arccotangentă

$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ (fig. 2.20)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi$;
- c) nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$.

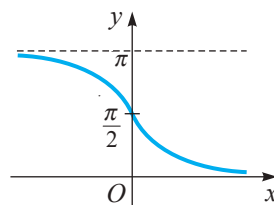


Fig. 2.20

XI. Funcția modul (valoarea absolută)

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = |x|$ (fig. 2.21)

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$, $x_0 \in \mathbb{R}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} |x| = +\infty$.

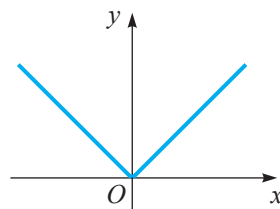


Fig. 2.21

Cea mai simplă clasă de funcții care se studiază în analiza matematică este mulțimea funcțiilor elementare I–XI. Funcțiile care se obțin din acestea prin aplicarea succesivă a unui număr finit de operații aritmetice și de compunere de asemenea se numesc **funcții elementare**. Constatăm că pentru funcțiile elementare $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției) este verificată relația $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in D$, adică *limita funcției într-un punct este egală cu valoarea funcției în acest punct*.

Exemple

1. a) Funcția definită prin formula $f(x) = \sqrt{x} + 2^x - 3 \log_2 x$ este elementară, deci

$$\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2^x - 3 \log_2 x) = f(4) = \sqrt{4} + 2^4 - 3 \log_2 4 = 12.$$

b) În mod similar,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\ln(\sin x) + 3 \ln \left(\frac{5}{4} + \cos^2 x \right) \right) = \ln \left(\sin \frac{\pi}{6} \right) + 3 \ln \left(\frac{5}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) = \ln \frac{1}{2} + 3 \ln 2 = 2 \ln 2.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{1}{3}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{ctg} x = +\infty$ etc.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze:

- a) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{1}{8} x^3 + \sqrt{x} + 5 \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^4 + \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{x} - \frac{2}{x^2} + x^3 \right)$;
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} \right)$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{x^2} - 3x^2 \right)$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + 3 + x^3 + \sqrt[3]{x} \right)$.

2. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + x - 10); & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5x^2 + 3); & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 3x^3 + 1); \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + 100x^2); & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 10x^2 + 1}{x^2 + 3x + 1}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x^2 + 3}{5x^4 - x^3 - 1}. \end{array}$$

3. Să se calculeze:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (2^x + \log_{0,25} x - (\sqrt{3})^x); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \log_2 e} (2^x - 2 \cdot 4^x + 8^x); \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^e} (\log_2 x + \log_4 x - e).$$

4. Să se calculeze:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt[4]{x^4 + 1}); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3 + 1)(1 - x^2); \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 - x^3)(x^3 - x + 1).$$

5. Să se calculeze: a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x + \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x)$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + 2 \operatorname{ctg} x - \cos x)$.

B₁ 6. Să se calculeze:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 5x^3}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^3}{2x^4 + 3}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 4}{1 + x - x^2}.$$

7. Să se calculeze:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +0} (\pi^x + \log_3 x); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +0} (\log_{0,5} x - 2^x); \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \lg x).$$

8. Să se calculeze: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{|x-1|}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{|x+1|}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-1|}{3x-1}$.

9.  **Lucrați în perechi!** Să se calculeze:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi} (\sin x + 2 \cos x - 3 \operatorname{ctg} x), \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow n\pi} (2 \sin x - 3 \cos x + \operatorname{tg} x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

10.  **Lucrați în perechi!** Să se completeze spațiile punctate, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(2^x) = \lim_{y \rightarrow \dots} \sin y = 0$, unde $y = 2^x$;

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg}(\pi^x + \ln x) = \lim_{y \rightarrow \dots} \operatorname{tg} y = \dots, \text{ unde } y = \dots$$

C₁ 11. Să se calculeze în punctul indicat x_0 limitele laterale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{\ln|x|}, \quad x_0 \in \{-1, 0, 1\}; & \text{b) } f(x) = e^{-\frac{1}{x^2-1}}, \quad x_0 \in \{-1, 1\}; \\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+1}}}, \quad x_0 = -1. \end{array}$$

12.  **Investigați!** Să se afle valoarea de adevăr a propoziției:

$$\text{a) } \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(1 - 2x); \quad \text{b) } \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x^2; \quad \text{c) } \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - \cos x),$$

unde simbolul $\nexists$ semnifică „nu există”.

13.  **Investigați!** Pentru care valori ale parametrului $m \in \mathbb{R}$ funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x^2 + m^2} - 2, & \text{dacă } x < 0 \\ m + 2, & \text{dacă } x = 0 \\ (m^2 e^x) : \left(1 + 2^{\frac{1}{x}}\right), & \text{dacă } x > 0, \end{cases} \quad \text{are în punctul } x_0 = 0 \text{ limita egală cu } f(0)?$$

14. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{m^2 x^2 - 6mx + 9 \cdot 2^{1-x}}, & \text{dacă } x < 1 \\ 4 - \sqrt{m^2 x^2 + 2mx + 3^{x-1}}, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases} \quad \text{are limită în punctul } x_0 = 1.$$

15. Aplicând noțiunea de limită laterală și teorema despre limita funcției compuse, să se calculeze:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos(1 - 2 \sin x); & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\sin^2 x); & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3^x - \ln x^2 + x^3}; \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{2}\right); & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^3(\pi \cos x); & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x}}{\ln(\cos x)}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \ln\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right). \end{array}$$

§3 Calculul limitelor de funcții

3.1. Proprietăți ale limitelor de funcții

Fie $E \subseteq \mathbb{R}$, funcțiile $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea E . Afirmatiile care urmează exprimă **proprietăți ale limitelor de funcții** sau **condiții suficiente de existență a limitei unei funcții într-un punct** și pot fi deduse folosind definiția limitei unei funcții într-un punct.

1° Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât funcția f este mărginită pe mulțimea $V(x_0) \cap E$.

2° Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, și $a < b$ ($a > b$), atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât $f(x) < g(x)$ (respectiv $f(x) > g(x)$) pentru orice $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$.

Consecință. În condițiile proprietății 2°, dacă $g(x) = \lambda$ ($\forall x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$), atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât $f(x) < \lambda$ (respectiv $f(x) > \lambda$) pentru orice $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$.

În cazul $\lambda = 0$ se obține $f(x) < 0$ (respectiv $f(x) > 0$) pentru orice $x \in V(x_0) \cap E \setminus \{x_0\}$.

3° **Trecerea la limită în inegalități.** Dacă

a) există limitele $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$,

b) $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in E$ sau pe o vecinătate a lui x_0 din E ,

atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Consecință. În condițiile proprietății 3°, dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, iar dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

4° **Criteriul „cleștelui”.** Fie funcțiile $f, g, h: E \rightarrow \mathbb{R}$ verifică condițiile:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in E$ sau pe o vecinătate a lui x_0 din E .

Atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

Exerciții rezolvate

☞ Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x^2 - e^{-x})$.

Rezolvare:

a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea dublă: $-1 \leq -\sin x \leq 1$.

Atunci $x - \sin x \geq x - 1$ (1). Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, din consecința proprietății 3° și din inegalitatea (1) rezultă că $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x) = +\infty$.

b) Deoarece $\sin x^2 - e^{-x} \leq 1 - e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$, din consecința proprietății 3° rezultă că $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x^2 - e^{-x}) = -\infty$.

3.2. Limite remarcabile

Limitele

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ② a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

sunt utile la calculul limitelor de funcții și se numesc **limite remarcabile**.

Lemă. Este adevărată inegalitatea dublă $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$, dacă $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Demonstrație

Fie $0 < x < \frac{\pi}{2}$, un cerc de rază 1 și unghiul la centru AOC având măsura în radiani egală cu x (fig. 2.22). Notăm cu B punctul de intersecție a tangentei la cerc în punctul A cu semidreapta OC , iar cu D – piciorul perpendicularei duse din punctul C pe dreapta OA . Evident, aria triunghiului AOC este mai mică decât aria sectorului AOC , care, la rândul său, este mai mică decât aria triunghiului AOB , adică

$$\frac{1}{2} AO \cdot DC \leq \frac{1}{2} AO^2 \cdot x \leq \frac{1}{2} AO \cdot AB. \quad (2)$$

Cum $AO = 1$, $DC = \sin x$, $AB = \operatorname{tg} x$, inegalitatea dublă (2) devine

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \text{ unde } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Dacă $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, atunci $0 < -x < \frac{\pi}{2}$. Deci, (3) implică $\sin(-x) \leq -x \leq \operatorname{tg}(-x)$, adică

$$-\sin x \leq -x \leq -\operatorname{tg} x, \text{ unde } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \quad (4)$$

Inegalitățile (3) și (4), în baza definiției valorii absolute, sunt echivalente cu inegalitatea dublă indicată în lema. ►

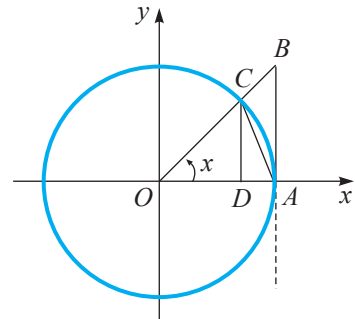


Fig. 2.22

Să demonstrăm limitele remarcabile ❶ și ❷.

1. Dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, atunci $\sin x \neq 0$ și, cum $x \neq 0$, din inegalitatea dublă stabilită în lema, prin împărțire la $|\sin x|$, obținem: $1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right| \Leftrightarrow |\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$.

Însă $|\cos x| = \cos x$, iar x și $\sin x$ au același semn pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Prin urmare,

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, dacă $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$, din ultima inegalitate dublă, conform criteriului „cleștelui”, rezultă că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. Pentru limita remarcabilă ❷ demonstrația este doar schițată. a) Folosind relația $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (a se vedea modulul 1, § 3, secvența 3.4), se poate demonstra că variabila discretă $n \in \mathbb{N}$ poate fi înlocuită cu variabila continuă $x \in \mathbb{R}$ și deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Cazul b) rezultă din cazul a) și din propoziția ❸ despre limita funcției compuse, dacă se efectuează în a) substituția $u = \frac{1}{x}$ și $u \rightarrow 0$ când $x \rightarrow \infty$.

Exerciții rezolvate

❧ 1. Să se arate că:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Rezolvare:

Vom rezolva aceste exerciții aplicând relațiile respective pentru limite de funcții elementare, limitele remarcabile ❶, ❷ și propoziția ❸ despre limita funcției compuse.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

b) Efectuăm schimbarea de variabilă $u = a^x - 1$. Atunci $x = \log_a(1+u)$ și $u \rightarrow 0$ când $x \rightarrow 0$. Prin urmare, similar cu limita a), obținem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \alpha \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right] = \\
 &= \alpha \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha \ln e \cdot 1 = \alpha, \text{ unde } u = \alpha \ln(1+x) \text{ și } u \rightarrow 0 \text{ când } x \rightarrow 0. \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1. \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ unde } u = \frac{x}{2} \rightarrow 0 \\
 &\text{când } x \rightarrow 0. \\
 \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^{-1} = 1, \text{ unde } u = \arcsin x \text{ și } u \rightarrow 0 \text{ când } x \rightarrow 0. \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{u} \right)^{-1} = 1, \text{ unde } u = \operatorname{arctg} x \text{ și } u \rightarrow 0 \text{ când } x \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Observație. Limitele remarcabile ❶ și ❷, precum și toate limitele din exercițiul rezolvat 1, în baza propoziției ❸ despre limita funcției compuse, rămân adevărate și în cazul în care se va face schimbarea de variabilă $x = u(t)$, unde $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = 0$ (cu excepția limitei remarcabile ❷ a), unde $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = \infty$.

2. Să se calculeze limita:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 5x}{\sin 4x}; & \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{x^2}; & \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x^2} - 3^{2x^2}}{\cos x - \cos 2x}.
 \end{aligned}$$

Rezolvare:

Folosind limita remarcabilă ❶, rezultatele exercițiului rezolvat 1 și observația de mai sus, obținem:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 5x}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\sin 3x}{3x} - 5 \frac{\operatorname{tg} 5x}{5x}}{4 \frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3 \cdot 1 - 5 \cdot 1}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{2}; \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{x^2} &= 12 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{3 \sin^2 2x} - 1}{3 \sin^2 2x} \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \right] = 12 \ln e \cdot 1^2 = 12; \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x^2} - 3^{2x^2}}{\cos x - \cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{3x^2} - 1) - (3^{2x^2} - 1)}{(1 - \cos 2x) - (1 - \cos x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{2^{3x^2} - 1}{3x^2} - 2 \cdot \frac{3^{2x^2} - 1}{2x^2}}{4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} - \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \ln \frac{8}{9}.
 \end{aligned}$$

3. Să se calculeze limita:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2 + x^3};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5+3x} - 2}{x^2 + 2x - 3}.$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{2x^2 + x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + (\cos 3x - 1))}{2x^2 + x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + (\cos 3x - 1))}{\cos 3x - 1} \cdot \frac{\cos 3x - 1}{(3x)^2} \cdot \frac{9}{2 + x} \right] = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{9}{2 + 0} = -\frac{9}{4}; \end{aligned}$$

b) Efectuăm schimbarea de variabilă: $u = x - 1$. Atunci $u \rightarrow 0$ când $x \rightarrow 1$ și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{5+3x} - 2}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5+3(1+u)} - 2}{(1+u)^2 + 2(1+u) - 3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3u} - 2}{u^2 + 4u} = \\ &= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{8}u\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{3}{8}u} \cdot \frac{1}{u + 4} \right] = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{4} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

4. Să se calculeze limita:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$

Rezolvare:

Vom aplica limitele remarcabile 2 a) și 2 b).

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{2x+3} - 1 \right)^{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+3} \right)^{1-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-4}} \right)^{\frac{2x+3}{-4}} \right]^{\frac{-4}{2x+3}(1-x)} = \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x-1)}{2x+3}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{2 + \frac{3}{x}}} = e^2, \end{aligned}$$

unde $u = \frac{2x+3}{-4}$ și $u \rightarrow \infty$ când $x \rightarrow \infty$;

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}} \right]^{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = e^{\frac{1}{2} \cdot 1} = \sqrt{e}, \text{ unde}$$

$u = \sin \frac{x}{2}$ și $u \rightarrow 0$ când $x \rightarrow 0$.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-1)(2x+1)-3}{(x-3)(x+2)+x^2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+2x)(1+3x)}{(1+x)(1-2x)}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{9x^2+1}{16x^2+1}}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)(1+3x)-1}{10x+x^2}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1-3x)-1}{(1-5x)(1+7x)-1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x)^2-9}{(3+x)^2-16}. \end{array}$$

2. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{\sin 4x}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^3 x)}{\cos^4 x}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 2(x-2)}{x-2}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x+x^2)}{x}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2\sin x}{x+3\sin x}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi+3x)}{\sin(2\pi-6x)}; & \text{h*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}-3}{\operatorname{tg} x + \sin 2x}; & \text{i*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{e^{5x}-e^{3x}}. \end{array}$$

B₁ 3. Să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt[3]{1+2x+x^3}-1}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+4x}-3}{\sqrt[3]{2+3x}-2}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}. \end{array}$$

4. Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} \text{a*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 2x)}; & \text{b*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}; \\ \text{c*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{e^{6x^2}-1}; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 3x}}{\operatorname{tg} x - \sin 4x}; \\ \text{e*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\arcsin x)}{\sqrt[5]{1-\sin 2x}-1}; & \text{f*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(e^{x^2} + \sin^2 x)}. \end{array}$$

C₁ 5. Să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} \text{a*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin(3x+\sin x)}; & \text{b*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 x}{\cos 2x - e^{x^2}}; \\ \text{c*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin 3x}}{\sin(\sin(\sin x))}; & \text{d*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\arctg x^2}; \\ \text{e*)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x \cos 2x}{e^{\sin x^2} - \cos 2x}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+7x}}{1+\sqrt[5]{1-2x}}. \end{array}$$

6. Să se aplice proprietățile limitelor de funcții și să se calculeze:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \cos x^2); & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin 2x - \cos 3x); \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - 2^x); & \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x)e^x. \end{array}$$

7.  **Lucrați în perechi!** Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, dacă:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} + mx + n \right) = 3; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(mx+n)}{x-1} = 2, \text{ unde } m+n=\pi. \end{array}$$

§4

Cazuri exceptate la operații cu limite de funcții

În §2 s-a afirmat că anumite operații cu limite de funcții nu au sens. Vom examina mai detaliat doar una dintre aceste operații.

Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funcții pentru care există limitele finite sau infinite $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. De exemplu, din definițiile respective ale limitei unei funcții într-un punct se poate stabili că: dacă $a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \infty$; dacă $a = +\infty$, $b = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$ etc. Simbolic, aceste propoziții se scriu astfel: $\infty + b = \infty$ ($b \in \mathbb{R}$), $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ și se numesc *forme* sau *cazuri neexceptate* (*determinate*) ori, simplu, *determinări*, iar despre suma $a + b$ în acest caz se spune că are sens. Tabelul complet al **formelor neexceptate**, care apar la operații cu limite de funcții, este prezentat în secvența 2.1.

Dacă însă $a = +\infty$, $b = -\infty$ sau $a = -\infty$, $b = +\infty$, atunci despre limita funcției $f + g$ în punctul x_0 nu se poate afirma nimic concret. Într-adevăr, dacă $x \rightarrow +\infty$, atunci:

- a) $f(x) = x^2 \rightarrow +\infty$, $g(x) = -x \rightarrow -\infty$ și $f(x) + g(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \rightarrow +\infty$;
- b) $f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, $g(x) = -x \rightarrow -\infty$ și $f(x) + g(x) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$;
- c) $f(x) = x + l \rightarrow +\infty$, $g(x) = -x \rightarrow -\infty$ și $f(x) + g(x) = l \rightarrow l$, $l \in \mathbb{R}$;
- d) $f(x) = x + \sin x \rightarrow +\infty$, $g(x) = -x \rightarrow -\infty$ și $f(x) + g(x) = \sin x$ nu are limită.

Așadar, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ depinde de însăși natura funcțiilor f și g și poate fi infinită, zero, orice număr real sau poate chiar să nu existe. În acest caz se spune că limita respectivă reprezintă o *formă* sau un *caz exceptat* (*nedeterminat*) ori, simplu, o *nedeterminare* de tipul $\infty - \infty$, iar despre suma $a + b$ se spune că este lipsită de sens.

În general, operațiile $a + b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ și a^b cu limite de funcții $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ conduc la următoarele șapte forme sau cazuri exceptate:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Nu există o regulă strictă care ar permite eliminarea cazurilor exceptate. Există doar unele recomandări pentru excluderea acestor forme.

I. Cazul exceptat $\frac{0}{0}$. Fie limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, unde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Se recomandă, dacă este posibil, să se descompună în factori expresiile $f(x)$ și $g(x)$ sau să se amplifice raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ cu expresii conjugate, simplificând apoi cu $x - x_0$, sau să se aplice limita remarcabilă ❶ ori limitele din exercițiul rezolvat 1, secvența 3.2.

Exemple

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{3x^2 - 2x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{3x+1} = \frac{3}{4}.$$

(Simplificarea cu $x-1$ a fost posibilă, deoarece $x \rightarrow 1$, și $x \neq 1$.)

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x + x^6))}{4x - x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x + x^6))}{\sin(2x + x^6)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{4x - x^2} = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{4x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + x^6)}{2x + x^6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^6}{4x - x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + x^5)}{x(4 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x^5}{4 - x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Similar cu exemplul 1 se calculează limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde P și Q sunt polinoame.

Fie $P, Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinoame nenule.

a) Dacă $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, atunci există polinoamele $P_1, Q_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

și $i, j \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $P_1(x_0) \neq 0$, $Q_1(x_0) \neq 0$, $P(x) = (x - x_0)^i P_1(x)$,

$$Q(x) = (x - x_0)^j Q_1(x) \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{j-i}}.$$

b) Dacă $P(x_0) \neq 0$, iar $Q(x_0) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^j} = \infty$.

II. Cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$ apare la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, unde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Se recomandă, dacă este posibil, să se depisteze la numitorul și numărătorul raportului $\frac{f(x)}{g(x)}$ funcțiile (termenii) care cresc cel mai repede la infinit, numite **funcții dominante**; să se extragă forțat ca factori comuni aceste funcții și să se transforme în mod echivalent expresiile obținute, aplicând, dacă este necesar, limitele remarcabile sau limitele din exercițiul rezolvat 1, secvența 3.2.

Exemplu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{4^{x+1} + 2^{x+2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left[\left(\frac{2}{3} \right)^x + 3 \right]}{4^{x+1} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x \right]} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x + 3}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^x} = \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot \frac{0+3}{1+0} = 0,$$

unde funcțiile dominante sunt 3^x și 4^{x+1} .

III. Cazul exceptat $0 \cdot \infty$ apare la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$, unde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Se recomandă să se efectueze transformarea echivalentă $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{(f(x))^{-1}}$, $f(x) \neq 0$, sau $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$, $g(x) \neq 0$, pentru a obține unul dintre cazurile exceptate $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$.

Exemplu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{2}{x} \right) &= (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y \cdot \sin 2y}{y^2} = \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\sin 2y}{2y} \right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \quad \text{unde } y = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ când } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

IV. Cazul exceptat $\infty - \infty$ apare la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$, unde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \text{ și } a = +\infty, b = +\infty \text{ sau } a = -\infty, b = -\infty.$$

Se recomandă să se efectueze transformarea echivalentă a expresiei $f(x) - g(x)$ prin aducere la numitor comun sau prin raționalizare cu expresii conjugate, sau prin aplicarea identității $f(x) - g(x) = \frac{(g(x))^{-1} - (f(x))^{-1}}{(f(x) \cdot g(x))^{-1}}$, $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, etc. pentru a obține unul dintre cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x + 1} - \frac{x^2 - 1}{2x - 1} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 4x}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{4x^2} = -\frac{1}{2}. \\ 2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + 1} = 2. \end{aligned}$$

V. Cazurile exceptate 1^∞ , 0^0 , ∞^0 apar la calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$.

Se recomandă:

- în cazul exceptat 1^∞ să se aplice limitele remarcabile privind numărul e ;
- în cazurile exceptate 1^∞ , 0^0 , ∞^0 să se utilizeze identitatea logaritmică fundamentală $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, $f(x) > 0$, și relația $\lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}$ (propoziția ⑤ din § 2), care plasează exponentul $g(x) \cdot \ln f(x)$ în cazul exceptat $0 \cdot \infty$.

Exemple

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+3} \right)^{2x+1} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+1}{x+3} - 1 \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-2}} \right]^{\frac{-2(2x+1)}{x+3}} = \\
 &= \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(2x+1)}{x+3}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(2+\frac{1}{x})}{1+\frac{3}{x}}} = e^{-4}, \text{ unde } y = -\frac{2}{x+3} \rightarrow 0 \text{ când } x \rightarrow +\infty. \\
 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2 \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} = e^{2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} = e^{2+0} = e^2.
 \end{aligned}$$

În modulul 4 vor fi formulate regulile lui l'Hospital pentru calculul limitelor de funcții în cazurile exceptate $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. Consecințe ale acestor reguli sunt următoarele limite:

$$\begin{aligned}
 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} &= 0 \quad (\alpha > 0, a > 0, a \neq 1) \\
 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} &= 0 \quad (\alpha > 0, a > 1)
 \end{aligned}$$

Aceste limite sunt utile în cazurile exceptate $\frac{\infty}{\infty}$ și $0 \cdot \infty$.

Observație. Dacă $x \rightarrow +\infty$ și $\alpha > 0$, $a > 1$, atunci funcțiile logaritmică $\log_a x$, putere x^α și exponențială a^x tind la plus infinit. Din limitele 1 și 2 rezultă că cea mai „lentă” este funcția $\log_a x$, mai „rapidă” este funcția x^α , iar cea mai „rapidă” este funcția a^x .

Această observație se aplică la determinarea funcțiilor dominante în cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze:

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(x^2-x-2)}{(x^2+x-6)^2}; & \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^5(3x+1)^5}{(2x+6)^{10}}; & \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x} + 3\sqrt{x}}; \\
 d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+5x+2}{\sqrt[3]{x}+1}; & \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x-4^x}{2^x-4^x}; & \quad f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x-4^x}{2^x-4^x}; \\
 g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-4^x}{2^x-4^x}; & \quad h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2+x^6)}{\ln(x^4+x^{10})}; & \quad i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+x^6)}{\ln(x^4+x^{10})}.
 \end{aligned}$$

2. Să se calculeze:

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{\ln(1-x^3+x^6)}; & \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+e^{5x})}{\ln(x^{10}+e^{4x})}; & \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2+e^{5x})}{\ln(x^{10}+e^{4x})}; \\
 d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+6x}-x); & \quad e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+x}); & \quad f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2}-x); \\
 g) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right); & \quad h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2} - \frac{x^2+3}{x-1} \right); & \quad i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x+1} - \frac{x^2-2x-1}{x-1} \right).
 \end{aligned}$$

B₁ 3. Să se calculeze:

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6\sin^2 x + \sin x - 2}{4\sin^2 x - 8\sin x + 3}; & \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}; & \quad \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3^{-x} + 2^{3x})}{\ln(e^{-x} + e^{2x})}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{4x+3} \right)^{\frac{1}{x^2}}; & \quad \text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+3} \right)^{5-2x}; & \quad \text{f)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+4x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}; & \quad \text{h)} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 5)^{\frac{1}{x-2}}; & \quad \text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})]. \end{aligned}$$

4. Să se calculeze:

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \operatorname{tg} x}{2 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 2x}}; & \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos 5x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}; & \quad \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\ln(x^2 + x^3)}}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow +0} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}}; & \quad \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}}; & \quad \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}{[(4x)^n + 1]^{\frac{n+1}{2}}}, \quad n \geq 1; & \quad \text{h)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

C₁ 5.  **Investigați!** Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$, dacă

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{4x^2 - x^3} + ax + b) = \frac{1}{3}.$$

6. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a\sqrt{x^2 + x} + b\sqrt{4x^2 + x})$ și să se discute după valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$.

7. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x + 1}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ din condițiile

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = 3, \quad \text{apoi să se calculeze } \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x).$$

8.  **Investigați!** Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & \text{dacă } x < 2 \\ b + \ln(x-1), & \text{dacă } x \geq 2. \end{cases}$ Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să existe limitele $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, iar $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze:

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - 6x + x^2}{2 + 3x - 2x^2}; & \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{(1 - 2x)(3x + 4)}; & \quad \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)(1+3x) - 2}{9 - (3-2x)^2}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}{(3-2x)^3}; & \quad \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x}{x+1} - \frac{2x^2 + 5x}{x-2} \right); & \quad \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[4]{x^3}}{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2}}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{6-10x} - 4}{2x^2 - 3x - 5}; & \quad \text{h)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{5 - \sqrt{10x+5}}; & \quad \text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x-2}}{x-1}. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze:

$$\begin{aligned} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{5+x}}{\sqrt[3]{1+2x} + 1}; & \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7-6x} - \sqrt[5]{16-15x}}{\sqrt[6]{9-8x} - 1}; & \quad \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1}); \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - x + 1}); & \quad \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}). \end{aligned}$$

3. Să se calculeze:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x + \sin 4x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x + 2 \sin x}{3 \sin 2x - \operatorname{tg} x};$

c*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \arcsin 6x}{\operatorname{tg}^2(3x)};$

d*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x - 3 \arctg 2x}{\arctg 6x};$

e*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{2^{3x} + 3^{2x} - 2};$

f*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\operatorname{tg} 6x}.$

B₁ 4. Să se calculeze:

a*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2(2x)};$

b*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos 2x - \cos 3x};$

c*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin 3x)}{e^{5x} - e^{3x}};$

d*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 6x)}{\ln(\cos 3x)};$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{x+4};$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \sin 2x} \right)^{\frac{1}{x}};$

g*) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$

h*) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 3^x}{1 + x \cdot 5^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

5. Să se calculeze limitele laterale:

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x}{(x+1)(x-2)};$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{|1-x|}{\sqrt{x^2-1}};$

c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{2 - 2^{\frac{x}{2-x}}};$

d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{1 - 2^x};$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x-2}{\ln(1+x)};$

f) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{3 - 3^{\frac{1+|x|}{1-x^2}}}.$

C₁ 6.  **Investigați!** Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, astfel încât să existe

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x):$ a) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \sqrt{5x+4} + 2a^2, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1;$

b) $f(x) = \begin{cases} a^2 + 3x + 2, & \text{dacă } x < 0 \\ 5\sqrt{a^2 + x^2} - 2, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sqrt{3a+1} + ax + a, & \text{dacă } x \leq -1 \\ x^2 - x\sqrt{a+4}, & \text{dacă } x > -1, \end{cases} \quad x_0 = -1;$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2 x^2 + 1}, & \text{dacă } x < 1 \\ 1 + 2ax, & \text{dacă } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

7.  **Investigați!** Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 + ax + b)}{2x^2 - 3x + 1} = 3, \text{ dacă } a + b = -1;$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x + 3}{x - 2} + ax + b \right) = 6;$

c*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{ax} - ae^{bx}}{x} = -4.$

8.  **Lucrați în perechi!** Secțiunea verticală a reliefului unei localități de munte este dată de

funcția $f: \left[-6, \frac{11}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - 6x - x^2, & \text{dacă } x \in [-6, -1), \\ 0,1x + 2,1, & \text{dacă } x \in [-1, 1], \\ -0,45x^2 + 2,7x - 0,05, & \text{dacă } x \in \left(1, \frac{11}{2} \right], \end{cases}$

la scara 1 : 100 m pe fiecare axă de coordonate. Pe platoul dintre cei doi munți ce corespunde valorilor abscisei $x \in [-1, 1]$ este situat un cătun.

- Să se traseze graficul funcției f și să se stabilească abscisele vârfurilor munților.
- Să se determine diferența dintre înălțimile celor două vârfuri.
- Să se afle înălțimea peretelui vertical al muntelui, ce corespunde abscisei $x = -1$.
- Să se calculeze unghiul de înclinație a platoului pe care este situat cătunul.
- Care este adâncimea minimă a fântânilor din cătun, dacă axa Ox reprezintă nivelul pânzei apelor freactice?

9. **Lucrați în perechi!**

Graficul funcției $f: [-10, 2; 52] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200}x^2 - \frac{1}{50}, & \text{dacă } x \in [-10, 2;] \\ \frac{1}{5000}(x-2)^2 + \frac{1}{1000}, & \text{dacă } x \in (2; 52], \end{cases}$

reprezintă relieful subacvatic al unei mări la scara 1 : 10 000 m, astfel încât suprafața mării corespunde liniei orizontale $y = 0,5$.

- Să se traseze graficul funcției f și să se determine adâncimea maximă a mării.
- Care este lățimea mării, dacă ea corespunde liniei orizontale $y = 0,5$?
- Să se determine înălțimea rupturii plăcilor tectonice în punctul de abscisă $x = 2$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilul real

- Calculați:
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{10-3x} - \sqrt{2+x}}{x-2}$; ⑤
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin 5x - 3 \sin \frac{x}{2}}{\sin 2x}$. ⑤
- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{4-2x}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2 + 3x - x^2, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$
 - Calculați limitele laterale ale funcției f în punctul $x = 0$. ④
 - Determinați și argumentați valoarea de adevăr a propoziției: ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2. \quad \text{A/F}$$
- Fie $l_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$, $l_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$, $l_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$.
 - Calculați l_1 și l_3 . ⑤
 - Fără a calcula limita l_2 , stabiliți valoarea $l = l_1 l_2 l_3$. ③
 - Utilizând rezultatul de la b), determinați valoarea limitei l_2 . ②
 - Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_{l_2^2}(x - l_1^2) + \log_{l_2^2}(l_3^2 - x) = \log_{l_2^2} 9 - 2 \log_{l_2^2} l$. ⑤
- Indicați litera corespunzătoare variantei corecte de răspuns.

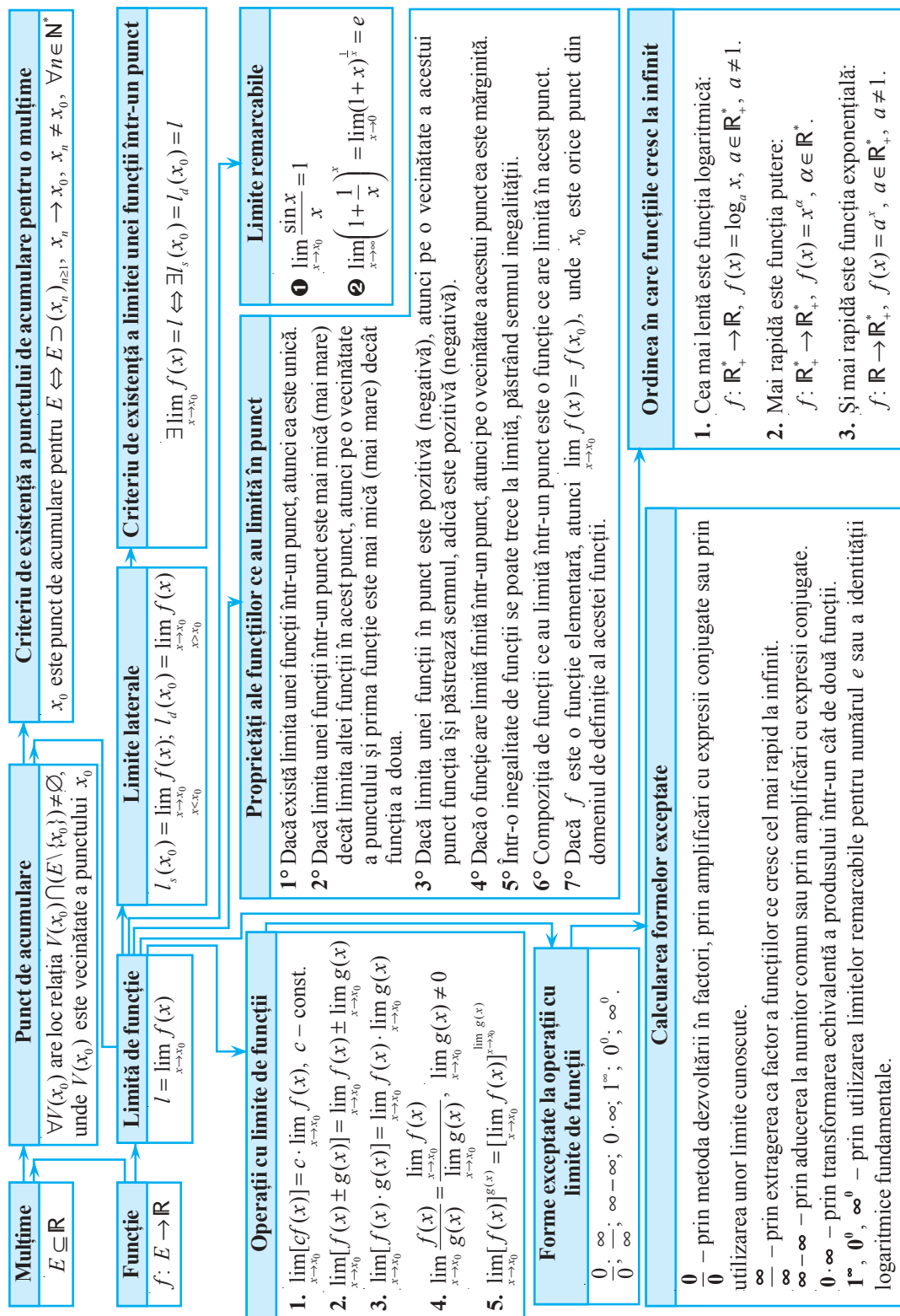
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x}{x+3} + ax + b \right) = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ dacă}$$

A $a = 0, b = 4$. B $a = -1, b \in \mathbb{R}$. C $a = -1, b = 2$. D $a \in \{0, 1\}, b \in \mathbb{R}$. ⑤

Argumentați răspunsul.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36-35	34-31	30-27	26-22	21-16	15-11	10-7	6-4	3-2	1-0



Obiective

- ⇒ *studierea continuității, identificarea punctelor de discontinuitate în baza formulei analitice sau pe graficele funcțiilor date;
- ⇒ *aplicarea în diverse contexte a noțiunilor *funcție continuă*, *funcție continuă lateral*, *funcție discontinuă într-un punct* sau *pe o mulțime*;
- ⇒ *utilizarea proprietăților funcțiilor continue pe un interval în diverse contexte;
- ⇒ *recunoașterea și determinarea asimptotelor graficului funcției;
- ⇒ *aplicarea noțiunii *limita funcției* la determinarea asimptotelor graficului funcției.

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$). În modulul 2 am studiat comportarea funcției f în vecinătatea unui punct de acumulare x_0 al mulțimii E . Punctul x_0 nu aparținea în mod necesar mulțimii E , iar în cazul în care x_0 aparținea lui E , valoarea funcției f în x_0 nu era luată în considerare.

În acest modul vom studia comportarea funcției f nu numai în vecinătatea punctului x_0 , dar și în însuși x_0 , și anume: vom compara valoarea funcției f în x_0 cu valorile sale în punctele vecine cu x_0 . Pentru aceasta este necesar ca funcția f să fie definită în punctul x_0 , adică x_0 să aparțină mulțimii E .

§1 Funcții continue într-un punct. Funcții continue pe o mulțime

De noțiunea *limita funcției* este strâns legată o altă noțiune importantă a analizei matematice – *continuitatea funcției*. Această noțiune a fost definită într-o formă riguroasă de către matematicienii B. Bolzano¹ și A. L. Cauchy.



Bernhard Bolzano

1.1. Noțiunea de continuitate

În mod intuitiv, afirmațiile *o curbă este continuă* și *o curbă nu are întreruperi*, adică poate fi trasată fără a ridica creionul de pe hârtie, sunt echivalente.

Noțiunile *funcție continuă*, *funcție discontinuă* (într-un punct sau pe o mulțime) pot fi înțelese cu ușurință observând graficele unor funcții.

¹ Bernhard Bolzano (1781–1848) – filozof, logician și matematician ceh de origine italiană.

Exemple

1. Presupunem că pe axa numerelor se mișcă uniform un mobil care în momentul $t = 0$ se află în origine. Dacă viteza presupusă constantă a mobilului este v , atunci, notând cu $s(t)$ distanța parcursă de mobil în timpul t , obținem ecuația $s(t) = vt$, $t \geq 0$. Graficul funcției $s: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $s(t) = vt$, este reprezentat în figura 3.1.

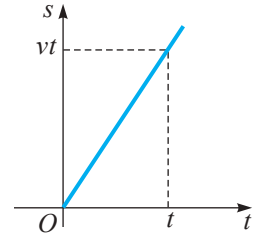


Fig. 3.1

2. Considerăm funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 1, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ 1, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 1+x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Graficele acestor funcții sunt reprezentate în figura 3.2.

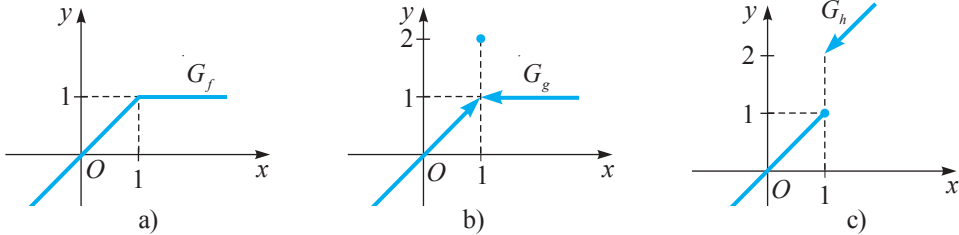


Fig. 3.2

Graficele funcțiilor s (fig. 3.1) și f (fig. 3.2 a)) pot fi trasate printr-o mișcare continuă a creionului, iar graficele funcțiilor g și h (fig. 3.2 b), c)) sunt întrerupte în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

Pentru a pune în evidență deosebirea dintre comportarea funcțiilor f, g și h în punctul $x_0 = 1$, vom compara limitele lor laterale în $x_0 = 1$ cu valorile lor respective în acest punct:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1, \quad f(1) = 1;$$

$$g(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad g(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1, \quad g(1) = 2;$$

$$h(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1, \quad h(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (1+x) = 2, \quad h(1) = 1.$$

Funcțiile f și g în punctul $x_0 = 1$ au limita 1, adică $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$. Constatăm că $f(1) = 1$, $g(1) = 2$. Graficul funcției g se întrerupe în punctul de abscisă $x_0 = 1$, deoarece $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$, iar $g(1) = 2$. Graficul funcției h de asemenea se întrerupe în punctul de abscisă $x_0 = 1$, deoarece limitele ei laterale în acest punct sunt diferite (funcția h nu are limită în punctul $x_0 = 1$). Astfel, deducem că graficul funcției f nu se întrerupe în punctul de abscisă $x_0 = 1$ din două motive:

1) există $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$;

2) limita $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ este egală cu valoarea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

În baza acestor considerații, putem formula următoarea

Definiție. Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și un punct $x_0 \in E$ de acumulare pentru E . Spunem că funcția f este **continuă în punctul** x_0 dacă ea are limită în acest punct și această limită este egală cu valoarea funcției în x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observație. Dacă x_0 nu este punct de acumulare, adică este punct izolat, considerăm, prin definiție, că funcția este **continuă** într-un astfel de punct.

Ținând seama de această observație, vom pune problema continuității unei funcții numai în punctele de acumulare ale domeniului ei de definiție.

Definiția continuității unei funcții f într-un punct x_0 se bazează pe noțiunea de limită a funcției f în acest punct x_0 . De aceea unele proprietăți ale limitelor de funcții se vor regăsi și în cazul funcțiilor continue.

Utilizând definițiile limitei unei funcții într-un punct, obținem caracterizări ale continuității.

Teorema 1. Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in E$.

1. Funcția f este continuă în punctul $x_0 \Leftrightarrow$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in E$ din $|x - x_0| < \delta$ rezultă că $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow$ pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \in E$, din faptul că $x_n \rightarrow x_0$ când $n \rightarrow \infty$ rezultă că șirul respectiv $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge la $f(x_0)$, adică $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ când $n \rightarrow \infty$.

3. f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow$ există limitele laterale (x_0 un punct interior mulțimii E):

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \quad \text{și} \quad f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Propozițiile 1–3 semnifică existența limitei funcției f în punctul x_0 și $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dacă funcția f este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci x_0 se numește **punct de continuitate** al funcției f . În cazul când funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in E$, ea se numește **discontinuu în punctul x_0** , iar x_0 se numește **punct de discontinuitate** al funcției f .

Funcția f continuă în orice punct al unei mulțimi $A \subseteq E$ se numește **continuă pe mulțimea A** .

În cazul în care $A = E$, în loc să spunem că f este continuă pe tot domeniul său de definiție, putem spune, mai simplu, că **f este o funcție continuă** (fără a mai menționa pe care mulțime).

Observație. S-a demonstrat că limita funcțiilor elementare în orice punct x_0 din domeniul lor de definiție se calculează înlocuind x cu x_0 direct în funcție, adică

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Astfel, funcțiile elementare (polinomiale, raționale, exponențiale etc.) sunt continue pe orice interval pe care sunt definite.

Concluzie. Funcțiile elementare sunt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.

Exemple

1. Funcția f (fig. 3.2 a)) este continuă în punctul $x_0 = 1$, iar funcțiile g, h (fig. 3.2 b), c)) sunt discontinue în acest punct.

2. Funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^3 - 1$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = 3^x$, fiind elementare, sunt continue pe $\mathbb{R}$, iar funcția $\varphi: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt{1 - 3^x}$, este continuă pe $(-\infty, 0]$ din aceleași considerente.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se studieze continuitatea funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ \frac{x+1}{2}, & \text{dacă } x \in (1, +\infty). \end{cases}$

Rezolvare:

Când se cere să studiem continuitatea unei funcții fără a fi precizat un anumit punct, subînțelegem că trebuie să studiem problema pe întreg domeniul de definiție.

Funcția f , fiind definită pe $(0, 1]$ prin $f(x) = x^2$ și pe $(1, +\infty)$ prin $f(x) = \frac{x+1}{2}$, este continuă pe aceste intervale (fig. 3.3). Urmează să studiem continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

Avem: $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1$,

$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+1}{2} = 1$ și $f(1) = 1$.

Deci, $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$. Conform teoremei 1 (propoziția 3), funcția f este continuă și în punctul $x_0 = 1$.

Răspuns: Funcția f este continuă pe $(0, +\infty)$.

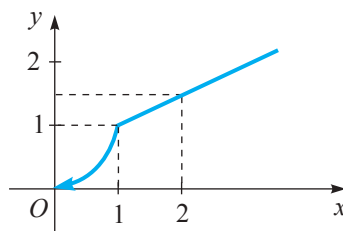


Fig. 3.3

1.2. Puncte de discontinuitate

Punctele de discontinuitate ale unei funcții pot fi de două spețe (categorii).

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și punctul $x_0 \in E$ (x_0 punct interior mulțimii E).

Definiție. Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța întâi** pentru funcția f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite, însă $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Exerciții rezolvate

☞ 1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 2, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

Rezolvare:

$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 2$.

Cum $f(-0) \neq f(+0)$, rezultă că $x_0 = 0$ este un punct de discontinuitate de speța întâi pentru funcția f .

☞ 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \\ 2, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

Funcția f este continuă pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, iar în punctul $x_0 = 1$ avem $f(1-0) = f(1+0) = 2$ și $f(1) = 1$ (fig. 3.4).

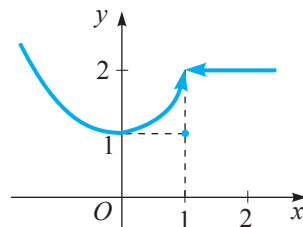


Fig. 3.4

Prin urmare, funcția f nu este continuă în punctul $x_0 = 1$, având în acest punct o discontinuitate de speța întâi.

Definiție. Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța a doua** pentru funcția f dacă el nu este punct de discontinuitate de speța întâi.

Din definiție rezultă că, într-un punct de discontinuitate de speța a doua, fie cel puțin o limită laterală este infinită (adică egală cu ∞), fie cel puțin o limită laterală nu există.

Exerciții rezolvate

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcției f (fig. 3.5) în punctul $x_0 = 0$.

Rezolvare:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \text{ Prin urmare, } x_0 = 0 \text{ este un}$$

punct de discontinuitate de speța a doua pentru funcția f .

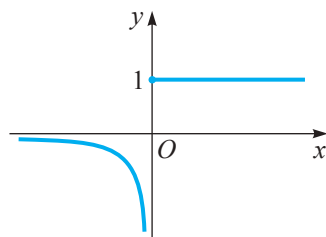


Fig. 3.5

2. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Să se arate că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 0$ și orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ este punct de discontinuitate de speța a doua pentru această funcție.

Rezolvare:

Fie $x_0 = 0$ și un șir arbitrar $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$. Atunci $f(x_n) = \begin{cases} x_n, & x_n \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și, evident, $f(x_n) \rightarrow 0 = f(0)$ când $n \rightarrow \infty$. Deci, funcția f este continuă în punctul $x_0 = 0$.

Fie acum un oarecare $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vom arăta că nu există limita la stânga a funcției f în punctul x_0 . Considerăm două șiruri, $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n \in \mathbb{Q}$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, astfel încât $x'_n \rightarrow x_0$ și $x''_n \rightarrow x_0$ când $n \rightarrow \infty$. Atunci, conform definiției funcției f , rezultă că $f(x'_n) = x'_n \rightarrow x_0$, iar $f(x''_n) = 0 \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$. Însă $x_0 \neq 0$. Astfel, am arătat că există două șiruri, $(x'_n)_{n \geq 1}$ și $(x''_n)_{n \geq 1}$, care converg la stânga la x_0 , însă șirurile respective, $(f(x'_n))_{n \geq 1}$ și $(f(x''_n))_{n \geq 1}$, converg la limite diferite. Aceasta înseamnă că nu există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Deci, x_0 este un punct de discontinuitate de speța a doua pentru funcția f .

Definiție. Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct interior mulțimii E . Dacă există limitele laterale finite $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$, atunci diferența $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se numește **saltul funcției f în punctul x_0** .

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$, are în punctul $x_0 = 0$ un salt egal cu 2 (fig. 3.6 a)).

Observații. 1. În punctele de continuitate de speța a doua, noțiunea de salt al funcției nu este definită, deoarece cel puțin una dintre limitele laterale nu există sau este infinită.

2. Evident, saltul unei funcții f într-un punct de continuitate x_0 este egal cu zero, deoarece în acest caz $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

3. Saltul unei funcții f poate fi egal cu zero și într-un punct de discontinuitate x_0 , dacă $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

De exemplu, fie funcția $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [-\pi, 0) \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Avem $f(-0) = f(+0) = 0$, iar $f(0) = 1$. Prin urmare, funcția f este discontinuă în punctul $x_0 = 0$ și saltul ei este egal cu zero (fig. 3.6 b)).

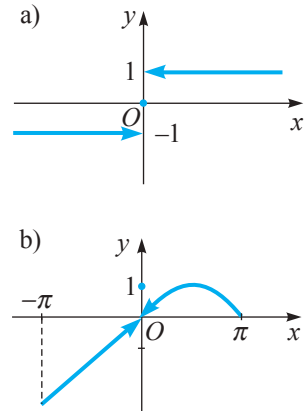


Fig. 3.6

1.3. Continuitatea laterală

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) și $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E_- = E \cap (-\infty, x_0) = \{x \mid x \in E, x < x_0\}$.

Definiție. Funcția f se numește **continuă la stânga** în punctul x_0 dacă în x_0 există limita la stânga $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E_+ = E \cap (x_0, +\infty) = \{x \mid x \in E, x > x_0\}$.

Definiție. Funcția f se numește **continuă la dreapta** în punctul x_0 dacă în x_0 există limita la dreapta $f(x_0 + 0)$ și $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ este continuă la stânga în punctul $x_0 = 0$, întrucât $f(-0) = 1 = f(0)$, și nu este continuă la dreapta în acest punct, deoarece $f(+0) = -1$, iar $f(0) = 1$, adică $f(+0) \neq f(0)$.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$ este continuă la dreapta în punctul $x_0 = 0$, fiindcă $f(+0) = -1 = f(0)$, și nu este continuă la stânga în acest punct, deoarece $f(-0) = 1$, iar $f(0) = -1$, adică $f(-0) \neq f(0)$.

Observații. 1. Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) este continuă în punctul $x_0 \in E$ (x_0 – punct interior mulțimii E) dacă și numai dacă ea este continuă și la stânga, și la dreapta în x_0 (a se compara cu teorema 1, propoziția 3).

2. Dacă $E = [a, b]$, atunci problema continuității la stânga în punctul a și respectiv la dreapta în punctul b nu are sens. În plus, funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în a (respectiv în b) dacă și numai dacă f este continuă la dreapta în a (respectiv la stânga în b).

Exerciții rezolvate

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + a \cos x, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ x^2 + b, & \text{dacă } x > 0, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$

Să se determine valorile parametrilor reali a și b pentru care funcția f este:

- a) continuă la stânga în punctul $x_0 = 0$;
- b) continuă la dreapta în punctul $x_0 = 0$;
- c) continuă pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (e^x + a \cos x) = 1 + a$. În baza definiției, funcția f este continuă la stânga în punctul $x_0 = 0$ dacă și numai dacă $f(-0) = f(0) \Leftrightarrow 1 + a = 1 \Leftrightarrow a = 0$ și $b \in \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 + b) = b$. Conform definiției, funcția f este continuă la dreapta în punctul $x_0 = 0$ dacă și numai dacă $f(+0) = f(0) \Leftrightarrow b = 1$ și $a \in \mathbb{R}$.

c) Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ pentru orice valori ale parametrilor a și b . În punctul $x_0 = 0$ funcția f este continuă dacă și numai dacă $f(-0) = f(+0) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$ și $b = 1$.

Răspuns: a) $a = 0, b \in \mathbb{R}$; b) $a \in \mathbb{R}, b = 1$; c) $a = 0, b = 1$.

2. Să se studieze continuitatea la stânga și la dreapta a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^2 + 1, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Rezolvare:

Pentru $x < 1$ și $x > 1$ funcția f , fiind elementară, este continuă. Studiem continuitatea ei în punctul $x = 1$. Calculăm limitele laterale: $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1 = f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \neq f(1)$. Prin urmare, f este continuă la stânga în punctul $x = 1$ și nu este continuă la dreapta în acest punct.

1.4. Operații cu funcții continue (opțional)

Vom arăta că operațiile aritmetice asupra funcțiilor continue, precum și compunerea acestora, conservă continuitatea.

Teorema 2. Dacă $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) sunt funcții continue într-un punct $x_0 \in E$, atunci funcțiile αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sunt continue în x_0 . Dacă, în plus, $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in E$, atunci și $\frac{f}{g}$ este o funcție continuă în x_0 .

Această teoremă, stabilită local (într-un singur punct x_0), se poate extinde la nivelul unei mulțimi, în particular, pe tot domeniul de definiție E .

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \sin x + x$, este continuă pe $\mathbb{R}$ ca sumă a trei funcții elementare continue pe $\mathbb{R}$.

2. Funcția definită prin $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ este continuă pe mulțimea $E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, fiind câtul a două funcții continue pe această mulțime și având numitorul nenul pe E .

3. Funcția definită prin $f(x) = \operatorname{tg} x$ este continuă pe mulțimea $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$, deoarece $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($\cos x \neq 0, x \in E$) și sinus, cosinus sunt funcții continue pe E .

Teorema 3. Fie funcțiile $g: E_1 \rightarrow E_2$, $f: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$) și compusa lor $h = f \circ g: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția g este continuă în punctul $x_0 \in E_1$ și funcția f este continuă în punctul $y_0 = g(x_0) \in E_2$, atunci funcția h este continuă în x_0 .

Observație. În condițiile teoremei 3 și din definiția continuității rezultă următoarea egalitate: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$, care înseamnă că limita „comută” cu toate funcțiile continue.

Exemple

1. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x} = e^0 = 1$ în baza continuității funcțiilor $f(x) = e^x$ și $g(x) = \sin x$;

2. $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{tg}(2^{\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}(\lim_{x \rightarrow \pi} 2^{\sqrt{x}}) = \operatorname{tg}(2^{\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{x}}) = \operatorname{tg} 2^{\sqrt{\pi}}$ în baza continuității funcțiilor a^x , $\operatorname{tg} x$ și x^α în punctele respective.

Corolar. Dacă funcția $g: E_1 \rightarrow E_2$ este continuă pe mulțimea E_1 și funcția $f: E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe mulțimea E_2 ($E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$), atunci funcția $h = f \circ g: E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe E_1 .

Așadar, prin compunerea a două funcții continue se obține o funcție continuă, iar teoremele 2 și 3 se extind la sume, produse, compuneri ale unui număr finit de funcții continue.

Exercițiu rezolvat

☞ Fie $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue în punctul $x_0 \in E$ (pe mulțimea E). Să se demonstreze că și funcțiile $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sunt continue în x_0 (respectiv continue pe E).

Rezolvare:

Funcția $|f|$, adică $|f|(x) = |f(x)|$, poate fi reprezentată ca o compusă a două funcții continue: $|f| = \varphi \circ f$, unde $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = |x|$, este funcția modul, care este continuă pe mulțimea E . În baza teoremei 3, funcția $|f|$ este continuă în punctul x_0 (respectiv continuă pe mulțimea E).

Continuitatea celorlalte două funcții rezultă din teorema 2 și din relațiile:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}((f+g) + |f-g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}((f+g) - |f-g|).$$

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 1$, este continuă în punctele $x_0 = 0$ și $x_1 = 2$.

2.  **Investigați!** Să se studieze continuitatea funcției f pe domeniul ei de definiție:

a) $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + x + \frac{x}{x+3}$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2 + 1}$;

c) $f: (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+3} + \ln(x+4)$.

3. Să se stabilească dacă este continuă pe $\mathbb{R}$ funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x+1|$;

b) $f(x) = x + |x-1|$;

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă } x > 0 \\ 2, 7, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$

4.  **Investigați!** Să se studieze continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dacă } x < 0 \\ x, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{\sin 2x}{2}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

B₁ 5. Aplicând inegalitatea $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, să se demonstreze continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sin x$;

b) $g(x) = \cos x$;

c) $f(x) = \sin 2x$;

d) $f(x) = \cos 2x$.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos x + |x-1|e^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

a) Să se explice funcția f .

b) Să se studieze continuitatea funcției f .

7.  **Investigați!** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^3 + a^3, & \text{dacă } x > 1, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$.

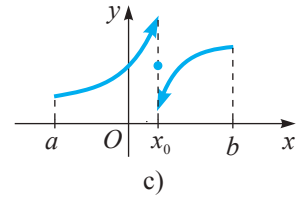
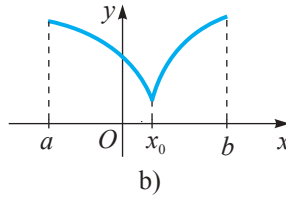
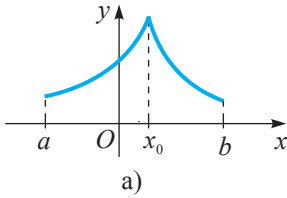
Să se determine valorile parametrului a pentru care funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

8. Să se afle punctele de discontinuitate și să se calculeze în aceste puncte saltul funcției

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: a) $f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \sin(x-1), & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x+1), & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

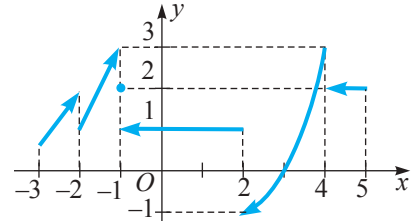
C₁ 9. Să se afle intervalele de continuitate ale funcției $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reprezentate grafic:



10. Funcția $f: [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ este reprezentată grafic în figura alăturată.

a) Să se indice intervalele pe care funcția f este continuă.

b) Să se calculeze: $f(-1) \cdot f(0)$, $f(2) \cdot f(4)$, $f(0) \cdot f(5)$.



11. Să se studieze continuitatea și să se traseze graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{x}{n}, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

b) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{2n} + x^{2n+2})$.

12. **Investigați!** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + be^x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ 1 - ax, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este continuă:

a) la stânga în punctul $x_0 = 1$;

b) la dreapta în punctul $x_0 = 1$.

13. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4 - a \ln x, & x \geq 1 \\ 1 + ax, & x < 1, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine valorile reale ale parametrului a pentru care funcția f este continuă pe $(0, +\infty)$.

b) Pentru $a = 3$, să se rezolve ecuația $f(x) + 2f(x^2) = -3$ pe intervalul $[1, +\infty)$.

§2 Proprietăți ale funcțiilor continue

Definiție. O funcție $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) se numește:

a) **mărginită superior** dacă imaginea sa $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ este o mulțime mărginită superior, adică există $\overline{M} \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) \leq \overline{M}$, $\forall x \in E$.

b) **mărginită inferior** dacă imaginea sa $f(E)$ este o mulțime mărginită inferior, adică există $\overline{m} \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overline{m} \leq f(x)$, $\forall x \in E$.

c) **mărginită** dacă imaginea sa $f(E)$ este o mulțime mărginită, adică există $\overline{m}, \overline{M} \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overline{m} \leq f(x) \leq \overline{M}$, $\forall x \in E$.

Numerele $M = \sup_{x \in E} f(x)$ și $m = \inf_{x \in E} f(x)$ se numesc respectiv **marginea superioară** și **marginea inferioară** ale funcției f .

2.1. Proprietăți de mărginire

În general, o funcție continuă nu este mărginită. De exemplu, funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, nu este mărginită superior, fiind definită pe un interval nemărginit (fig. 3.7 a)). Dar nici funcția continuă $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$, nu este mărginită superior, deși este definită pe un interval mărginit (fig. 3.7 b)).

Este adevărat următorul rezultat fundamental din care rezultă că este esențială condiția ca mulțimea E să fie compactă.

Teorema 4 (Weierstrass de mărginire)

Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci:

- 1) f este mărginită;
- 2) f își atinge marginile, adică există $x_1, x_2 \in [a, b]$, astfel încât $f(x_1) = m$ și $f(x_2) = M$, unde m și M sunt respectiv marginea inferioară și cea superioară ale funcției f :

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Numerele m și M se numesc **cea mai mică valoare** și respectiv **cea mai mare valoare** ale funcției f pe $[a, b]$.

Exemple

1. Funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, este continuă pe $[0, 1]$.

Evident, $m = 1 = f(0)$ și $M = 2 = f(1)$.

Astfel am verificat direct dacă funcția f își atinge marginile.

Restricția funcției f la intervalul deschis $(0, 1)$ nu își atinge marginile pe acest interval (fig. 3.8 a)).

2. Fie $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Atunci $f([1, +\infty)) = (0, 1]$ și funcția f nu își atinge marginea inferioară $m = 0$ pe intervalul $[1, +\infty)$ (fig. 3.8 b)).

Observații. 1. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare pe intervalul $[a, b]$, atunci $m = f(a)$ și $M = f(b)$, adică marginile ei sunt atinse la capetele intervalului $[a, b]$; dacă funcția f este descrescătoare pe intervalul $[a, b]$, atunci $m = f(b)$ și $M = f(a)$ (fără a mai fi nevoie de ipoteza de continuitate a funcției f).

2. Dacă $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare pe (a, b) , atunci $m = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $M = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$; dacă f este o funcție descrescătoare pe (a, b) , atunci $m = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$, $M = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$.

3. În general sunt posibile cazurile: $m = \inf_{x \in E} f = -\infty$, $M = \sup_{x \in E} f = +\infty$.

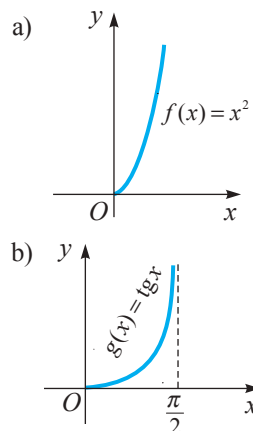


Fig. 3.7

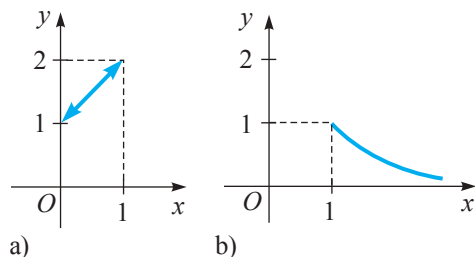


Fig. 3.8

2.2. Proprietatea lui Darboux

Funcțiile continue definite pe un interval au proprietatea că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare. Altfel spus, dacă o funcție continuă f ia două valori distincte, atunci f ia toate valorile cuprinse între aceste două valori.



Jean Gaston Darboux

Definiție. Fie I un interval. Se spune că o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ are **proprietatea lui Darboux**¹ pe intervalul I dacă pentru orice puncte α, β din I , $\alpha < \beta$, și orice număr λ cuprins între $f(\alpha)$ și $f(\beta)$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$, există cel puțin un punct $c_\lambda \in (\alpha, \beta)$, astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.

Geometric, aceasta înseamnă că orice valoare „intermediară” λ între $f(\alpha)$ și $f(\beta)$ de pe axa Oy este valoare a funcției în cel puțin un punct „intermediar” c între α și β de pe axa Ox . În figura 3.9 aceasta se realizează în trei puncte: c_1, c_2 și c_3 .

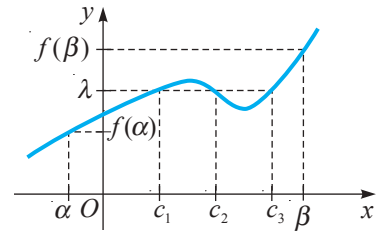


Fig. 3.9

Teorema 5 (teorema Bolzano–Cauchy despre anularea funcției). Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ și la extremitățile acestui interval funcția f ia valori de semne opuse: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.

Demonstrație

Pentru a fixa ideile, să presupunem că $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$ (fig. 3.10). Divizăm $[a, b]$ în două intervale de lungimi egale prin punctul $\frac{a+b}{2}$. Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, atunci teorema este demonstrată și se poate considera $c = \frac{a+b}{2}$. Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, atunci la capetele unuia dintre intervalele $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ funcția ia valori de semne opuse. Notând acest interval cu $[a_1, b_1]$, obținem $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

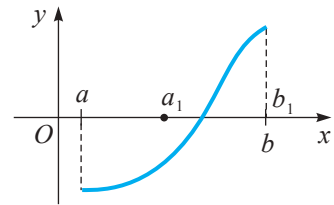


Fig. 3.10

Divizăm $[a_1, b_1]$ în două intervale de lungimi egale și omitem cazul în care funcția f se anulează în mijlocul acestuia, fiindcă atunci teorema este demonstrată.

Notăm cu $[a_2, b_2]$ acea jumătate a intervalului $[a_1, b_1]$ pentru care $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$.

¹ Jean Gaston Darboux (1842–1917) – matematician francez.

Repetăm înjumătățirea intervalului și raționamentele anterioare. Dacă după un număr finit de pași găsim un punct în care funcția f se anulează, atunci teorema este demonstrată. Fie nu găsim un astfel de punct la niciun pas. În acest caz obținem un șir descrescător de intervale incluse $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ care verifică relațiile:

$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 \text{ și } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt monotone și mărginite (deoarece $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$, $b \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$) și $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Aplicând teorema lui Weierstrass (modulul 1, secvența 3.1), obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$, $c \in [a, b]$. Trecând la limită în inegalitățile $f(a_n) < 0$ și $f(b_n) > 0$ și ținând cont de continuitatea funcției f în punctul c , obținem că $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$ și $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$. În concluzie, $f(c) = 0$. ►

Teorema 5 poate fi reformulată astfel:

Teorema 5' (teorema Bolzano–Cauchy despre anularea funcției). Dacă o funcție f este continuă pe un interval I și ia valori de semne opuse în punctele $a, b \in I$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b) .

Teorema 6. Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

2.3. Aplicații ale proprietăților funcțiilor continue la rezolvarea unor ecuații și inecuații

Conform teoremei 5', dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe $[a, b] \in I$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție $c \in (a, b)$. Dacă, în plus, funcția f este strict monotonă pe $[a, b]$, atunci soluția c este unică pe $[a, b]$.

Exemplu

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + 3x$. Să se demonstreze că pe intervalul $[-1, 0]$ ecuația $f(x) = 0$ are exact o soluție.

Rezolvare:

Funcția f este continuă și strict crescătoare pe intervalul $[-1, 0]$ ca sumă de două funcții crescătoare. În plus, $f(-1) \cdot f(0) = \left(\frac{1}{e^2} - 3\right) \cdot 1 < 0$. Prin urmare, există un unic $c \in (-1, 0)$, încât $f(x) = 0$.

Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) este o funcție continuă pe intervalul I și dacă f nu se anulează în niciun punct $x \in I$ (adică ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții în I), atunci funcția f are în mod necesar un semn constant pe I , adică $f(x) > 0$ sau $f(x) < 0$ pe acest interval.

Într-adevăr, în caz contrar ar exista puncte x_1, x_2 din I , $x_1 < x_2$, astfel încât $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, și atunci funcția f s-ar anula într-un punct $c \in (x_1, x_2)$ care aparține intervalului I , ceea ce este în contradicție cu ipoteza.

În general, a stabili semnul unei funcții f pe un interval înseamnă a rezolva inecuația de tipul $f(x) > 0$ (sau $f(x) < 0$) și a indica mulțimile pe care funcția f ia valori pozitive (sau negative).

Semnul unor funcții elementare poate fi stabilit aplicând *metoda intervalelor*. Să presupunem că $x_1 < x_2 < \dots < x_n \dots$ sunt *toate* zerourile unei funcții continue $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, adică $f(x_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ (ele pot fi un număr infinit). Atunci pe fiecare dintre intervalele $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n), \dots$ funcția f are semn constant. Pentru a determina acest semn, este suficient ca pe fiecare dintre aceste intervale să alegem câte un punct și să determinăm semnul funcției f în acest punct.

Exerciții rezolvate

❧ 1. Să se arate că orice funcție polinomială de grad impar are cel puțin un zero pe $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n+1}$, și presupunem că $a_0 > 0$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, rezultă că există x_1 , astfel încât $f(x_1) < 0$.

Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, rezultă că există x_2 , $x_2 > x_1$, astfel încât $f(x_2) > 0$. Așadar, funcția f se anulează între punctele x_1 și x_2 , deci există cel puțin un punct $c \in (x_1, x_2)$, astfel încât $f(c) = 0$.

❧ 2. Să se arate că funcția definită prin $f(x) = x^5 + 7x^3 + 7$ are un zero unic pe $[-1, 0]$.

Rezolvare:

Funcția f este continuă și strict crescătoare pe $[-1, 0]$ ca sumă a două funcții strict crescătoare (definite prin expresiile x^5 și $7x^3 + 7$) pe $[-1, 0]$. Cum $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$, rezultă că $f(-1) \cdot f(0) < 0$. Prin urmare, în intervalul $[-1, 0]$ ecuația $f(x) = 0$ are o soluție și aceasta este unică, deoarece funcția dată este strict crescătoare.

❧ 3. Să se arate că ecuația $\ln x + x = 0$ are o soluție unică $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

Rezolvare:

Fie funcția $f: \left[\frac{1}{e}, 1\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + x$. Funcția f , fiind continuă pe $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, are proprietatea lui Darboux pe acest interval și, cum $f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = -1 + \frac{1}{e} < 0$ și $f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$, rezultă că există $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, astfel încât $f(x_0) = 0$. Soluția x_0 este unică, deoarece funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x + x$, este strict crescătoare, ca sumă a două funcții strict crescătoare.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $(x^2 - 9)\ln x > 0$.

Rezolvare:

Zerourile funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 9)\ln x$, sunt 1 și 3. Funcția f , fiind continuă pe $(0, +\infty)$, are semn constant pe fiecare dintre intervalele $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. Alegem $\xi_1 = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, $\xi_2 = 2 \in (1, 3)$, $\xi_3 = 4 \in (3, +\infty)$ și obținem:

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{4} - 9\right) \ln \frac{1}{2} > 0, \quad f(\xi_2) = (4 - 9) \ln 2 < 0, \quad f(\xi_3) = (16 - 9) \ln 4 > 0.$$

Răspuns: $S = (0, 1) \cup (3, +\infty)$.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Fie intervalul $I = [a, b]$ și funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Care dintre următoarele cazuri pot avea loc?

- f este continuă, mărginită și își atinge marginile.
 - f este continuă și nemărginită.
 - f este discontinuă și își atinge marginile.
 - f este discontinuă, mărginită și nu-și atinge marginile.
 - f este discontinuă, $f(a) \cdot f(b) < 0$, însă ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții pe intervalul $[a, b]$.
 - f este continuă, $f(a) \cdot f(b) > 0$ și ecuația $f(x) = 0$ are soluții pe intervalul $[a, b]$.
- Să se argumenteze răspunsul apelând la proprietățile funcțiilor continue sau prin exemple.

2. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe intervalul I . Să se demonstreze că funcțiile

$$f_+: I \rightarrow \mathbb{R}, f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) > 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) \leq 0, \end{cases} \quad \text{și} \quad f_-: I \rightarrow \mathbb{R}, f_-(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) < 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) \geq 0, \end{cases}$$

sunt continue pe I . Să se traseze graficele funcțiilor f_+ și f_- , știind că $I = \mathbb{R}$ și:

- $f(x) = x$;
- $f(x) = \sin x$;
- $f(x) = 1 + x^2$;
- $f(x) = -e^x$.

3.  **Lucrați în perechi!** Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ \pi, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

este discontinuă și la dreapta, și la stânga în punctul $x = 0$.

Să se traseze graficul funcției f .

4. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 0 \\ 1 + x, & \text{dacă } x \geq 0; \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = [x] - x; \quad \text{c) } f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

5. Funcția $f: [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x}$, este continuă și are proprietatea că $f(-1) \cdot f(1) < 0$ și totuși ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții. Cum se explică?

6. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă astfel încât $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Să se arate că f este mărginită. Propoziția ar rămâne adevărată dacă intervalul $[0, +\infty)$ ar fi înlocuit cu intervalul $(0, +\infty)$? Să se exemplifice răspunsul.

B₁ 7.  **Investigați!** Să se arate că funcția continuă $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - x^2$, este mărginită pe $(0, 2)$, însă nu își atinge marginile pe $(0, 2)$, iar funcția discontinuă $g: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = [x]$, își atinge marginile pe acest interval. Să se traseze graficele acestor funcții.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

- $(|x| - 3)(\ln x + 4) < 0$;
- $(x^2 + 3x - 4)(2^x - 2) < 0$;
- $(x^3 + 2x^2 - 4x + 1)(\lg x - 10) > 0$.

9. Să se studieze semnul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- $f(x) = x(x - a)(x - b)(x - c)$, unde a, b, c sunt constante și $0 < a < b < c$;
- $f(x) = (x - 1)(x^2 + 3x - 4)(e^{x+4} - 1)$.

10. Să se studieze semnul funcției:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3e^x - 12$;
- $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - 3 \ln x$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 \cdot 2^x - 25$;
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 1$.

C₁ 11. Să se arate că dacă $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ((a, b) – interval finit sau infinit) este o funcție continuă și există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcția f este mărginită pe (a, b) .

12. Să se construiască o funcție $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și nemărginită pe (a, b) .

13. Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \leq 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{3}, & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

- Să se arate că funcția f este discontinuă în punctul $x = \frac{1}{2}$.

- Să se traseze graficul funcției f .

- Să se arate că funcția f își atinge marginile și că mulțimea valorilor ei este un interval închis.

14.  **Lucrați în perechi!** Să se dea exemplu de o funcție $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pentru care mulțimea valorilor ei este:

- un interval închis;
- un interval deschis;
- un interval semideschis.

§3 Asimptotele funcțiilor

Fie f o funcție definită pe mulțimea E , care este un interval sau o reuniune (finită sau infinită) de intervale. Dacă mulțimea E este nemărginită sau funcția f este nemărginită, atunci graficul ei este o mulțime nemărginită de puncte din plan (în sensul că nu există niciun dreptunghi care să conțină integral acest grafic). În acest caz, vom spune că graficul funcției f are *ramuri nemărginite*.

Dacă o ramură nemărginită a graficului funcției f se apropie oricât de mult de o dreaptă dată, se spune că această dreaptă este o *asimptotă a graficului (pentru graficul) funcției f* . Graficul unei funcții poate avea *asimptote orizontale, oblice, verticale*.

3.1. Asimptote orizontale

Considerăm o funcție $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, unde mulțimea E conține un interval de forma $(a, +\infty)$ sau $+\infty$ este punct de acumulare pentru E . În acest caz, graficul funcției f are o ramură nemărginită. Fie l ($l \in \mathbb{R}$) un număr și considerăm dreapta de ecuație $y = l$ (paralelă cu axa Ox). Pentru orice număr $x \in (a, +\infty)$, notăm prin P (prin Q) punctul de abscisă x situat pe dreapta de ecuație $y = l$ (respectiv pe graficul funcției f) (fig. 3.11).

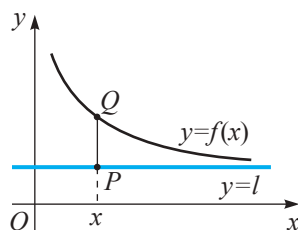


Fig. 3.11

Definiție. Dreapta de ecuație $y = l$ se numește **asimptotă orizontală la $+\infty$** a graficului funcției f (a funcției f) dacă lungimea segmentului $PQ = |f(x) - l|$ tinde la zero când $x \rightarrow +\infty$, adică $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - l| = 0$.

Această condiție este echivalentă cu faptul că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ există și că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

O definiție similară poate fi formulată și pentru asimptota orizontală la $-\infty$ a graficului funcției f în cazul în care mulțimea E conține un interval de forma $(-\infty, a)$ sau $-\infty$ este punct de acumulare pentru E (fig. 3.12).

Dacă limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$) nu există sau este infinită, atunci graficul funcției f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$ (respectiv la $-\infty$).

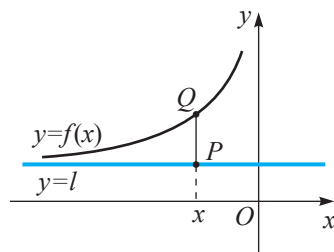


Fig. 3.12

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine asimptotele orizontale ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; b) $f(x) = 2^x$; c) $f(x) = e^{x^2}$; d*) $f(x) = x \sin x$.

Rezolvare:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$. Prin urmare, dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ și la $-\infty$ a graficului funcției f .

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$. Deci, dreapta de ecuație $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la $-\infty$ a graficului funcției f . Deoarece $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$, rezultă că graficul funcției f nu are asimptotă orizontală la $+\infty$.

c) Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} = +\infty$, rezultă că graficul funcției f nu are asimptote orizontale.

d) Graficul funcției f nu are asimptote orizontale nici la $-\infty$, nici la $+\infty$, deoarece nu există limitele $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$.

3.2. Asimptote oblice

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, unde mulțimea E conține un interval de forma $(a, +\infty)$ (sau $+\infty$ este punct de acumulare pentru E), și dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$. Pentru orice $x \in (a, +\infty)$ notăm prin P (prin Q) punctul de abscisă x situat pe dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$ (respectiv pe graficul funcției f) (fig. 3.13).

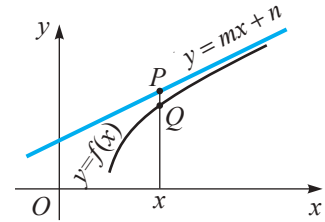


Fig. 3.13

Definiție. Dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, se numește **asimptotă oblică la $+\infty$** a graficului funcției f (a funcției f) dacă lungimea segmentului $PQ = |f(x) - (mx + n)|$ tinde la zero când $x \rightarrow +\infty$, adică $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$.

Teorema 6. Dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, este asimptotă oblică la $+\infty$ a graficului funcției $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ($m \neq 0$) și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$.

Fie mulțimea E conține un interval de forma $(-\infty, a)$ sau $-\infty$ este punct de acumulare pentru E . În mod similar se definește noțiunea **asimptotă oblică la $-\infty$** a graficului funcției f și se formulează teorema 6 pentru astfel de asimptote.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine asimptota oblică a graficului funcției:

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$;

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{|x - 1|}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Rezolvare:

a) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)} = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{x + 1} = -1$. Așadar, dreapta de ecuație $y = x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ și la $-\infty$ a graficului funcției f .

- b) $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{|x-1|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1$. Prin urmare, dreapta de ecuație $y = x + 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ a graficului funcției f . În mod similar, dacă $x \rightarrow -\infty$, obținem că dreapta de ecuație $y = -x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$ a graficului funcției f .
- c) Graficul funcției f nu are asimptote oblice nici la $+\infty$, nici la $-\infty$, deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, însă nu există limitele $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$.

3.3. Asimptote verticale

Exemple

1. Considerăm funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ (fig. 3.14). Observăm că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și, prin urmare, dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală pentru graficul funcției f . Din lectura graficului funcției f rezultă că dacă x tinde la zero, punctul $M\left(x, \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$, al graficului, de abscisă x , se apropie de axa Oy . În acest caz spunem că graficul funcției f are *asimptotă verticală* axa Oy , adică dreapta de ecuație $x = 0$.

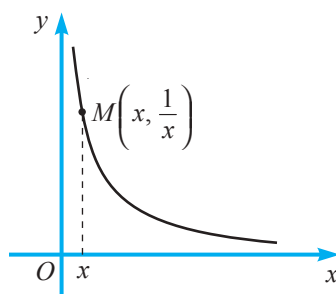


Fig. 3.14

2. Fie funcția $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ (fig. 3.15).

Avem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1-x)} = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

Dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ sunt asimptote verticale ale graficului funcției f .

Vom formula riguros termenul *asimptotă verticală*.

Fie funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ și a un punct de acumulare pentru mulțimea E .

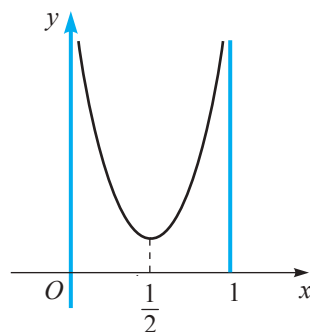


Fig. 3.15

Definiții. • Dacă limita la stânga $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, se spune că dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală la stânga** pentru graficul funcției f (pentru funcția f).

• Dacă limita la dreapta $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, se spune că dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală la dreapta** pentru graficul funcției f .

• Dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală** pentru graficul funcției f dacă ea este asimptotă verticală la stânga, la dreapta sau de ambele părți.

Dacă dreapta de ecuație $x = a$ este asimptotă verticală la stânga pentru graficul funcției f , atunci lungimea segmentului PQ tinde la zero când $x \rightarrow a - 0$, iar ordonata punctului Q tinde la $-\infty$ (fig. 3.16 a)) sau la $+\infty$ (fig. 3.16 b)).

O interpretare geometrică similară se obține și pentru asimptotă verticală la dreapta pentru graficul funcției f . (Ilustrați!)

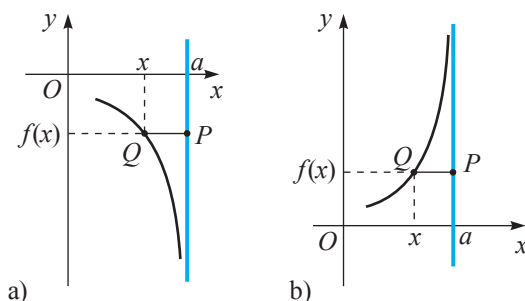


Fig. 3.16

Observație. Din definiție conchidem că asimptotele verticale ale graficului unei funcții $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ se vor căuta printre dreptele de ecuații $x = x_i$, unde x_i sunt punctele de discontinuitate de speța a doua și/sau punctele de acumulare finite pentru mulțimea E care nu aparțin lui E .

În particular, dacă $E = (a, b)$ și funcția f este continuă pe (a, b) , atunci dreapta de ecuație $x = a$ ($x = b$) este asimptotă verticală la graficul funcției f dacă și numai dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$).

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine asimptotele verticale ale graficului funcției:

a) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$;

b) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Rezolvare:

a) Cum funcția f este continuă pe $(-1, 1)$, eventualele asimptote verticale pentru graficul funcției f sunt dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = -1$.

Calculăm: $l_s(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$, $l_d(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$.

Prin urmare, dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = -1$ sunt asimptote verticale ale graficului funcției f .

b) Am stabilit (modulul 2) că $l_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$ și $l_d\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

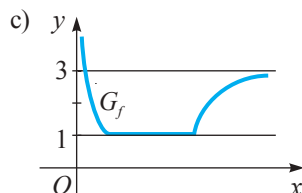
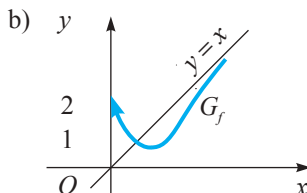
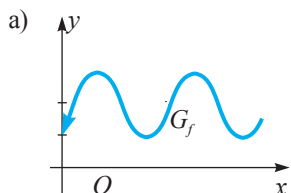
Deci, dreptele de ecuații $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = -\frac{\pi}{2}$ sunt asimptote verticale pentru graficul funcției f .

Exerciții propuse

Profilul real

- A₁** 1. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}:$$



2. Să se scrie o funcție al cărei grafic are asimptote verticale drepte de ecuație $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

- B₁** 3. (BAC, 2007). Completați caseta astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

„Ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$ a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{7-9x+8x^2}{3x^2+2x+5}$, este .

4. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2+bx+3}{v-c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale parametrilor a, b, c , astfel încât dreptele de ecuație $x=2$ și $y=3x+1$ să fie asimptote ale graficului funcției f .

5. Să se determine valorile reale a și b pentru care dreptele $x=1$ și $x=2$ sunt asimptote verticale ale graficului funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+x+2}{2x^2+ax+b}$.

- C₁** 6. Să se determine asimptotele graficului funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, D fiind domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

7. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice, verticale) ale graficului funcției:

a) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$;

b) $f: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$;

c) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real

A₁ 1. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se anulează cel puțin o dată pe mulțimea indicată:

- a) $f(x) = -x^4 + 2x + 1$ pe $\mathbb{R}$;
 b) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x - \frac{3}{2}$ pe $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;
 c) $f(x) = \ln(1+x) + \sqrt{x} - 1$ pe $I = [0, 1]$.

2. Să se afle punctele de discontinuitate și tipul lor pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x-1, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1; \end{cases}$
 c) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + x^3}{x^{2n} + 1}$; d) $f(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

B₁ 3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{b}}{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, știind că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

4. Să se precizeze dacă este mărginită funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2x^2 + 1}$; b) $f(x) = \sin x^2$; c) $f(x) = x + \sin x$; d) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

5. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue și $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Să se demonstreze că $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6.  **Lucrați în perechi!** Să se determine valorile parametrului α , $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât func-

ția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}, & \text{dacă } x \geq 1 \\ \alpha x + 3, & \text{dacă } x < 1, \end{cases}$ să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.

C₁ 7. Funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, are proprietatea că $f(-2) \cdot f(2) < 0$ și totuși ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții. Cum se explică?

8. Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ are soluții pe intervalul indicat pentru funcția:

- a) $f(x) = -x^3 + 8x + 30$, $\mathbb{R}$; b) $f(x) = x^4 - 3x + 1$, $[0, 1]$; c) $f(x) = (x-2)\sin \pi x$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

9. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

- a) $x^4 - 9x^2 > 0$; b) $(x^2 - 16)\ln x < 0$; c) $(|x| - 1)(\ln x + 2) > 0$.

10. Se consideră ecuația $x^3 + x^2 + mx - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ ecuația are o soluție în intervalul $[-1, 1]$.

11.  **Investigați!** Să se determine valoarea parametrului a , $a \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + a}$, D fiind domeniul maxim de definiție al funcției f , admite o singură asimptotă verticală.

12. Să se verifice dacă graficul funcției admite asimptote și să se completeze spațiile punctate.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, și $\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, rezultă că graficul funcției f ..., dar este posibil ca graficul funcției f să admită asimptotă oblică. Cum $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ nu există, rezultă că graficul funcției f ...

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{-x} = e^{-x}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, rezultă că dreapta de ecuație $x = x_0$... Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, rezultă că graficul funcției f ... Deoarece $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, rezultă că dreapta de ecuație $x = 0$ este ...

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{dacă } x > 0 \\ 1, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$ Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, iar $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, rezultă că dreapta de ecuație $x = 0$ este ... Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, rezultă că la $+\infty$ graficul funcției f ...

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilul real

- Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Determinați valoarea de adevăr a propoziției:
„Funcția este mărginită, însă nu-și atinge marginile”. **A / F** ③
- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ c \cdot \cos x + d, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - Determinați valorile reale ale parametrilor a, b, c, d astfel încât:
 - funcția f să fie continuă la stânga în punctul $x = 0$; ④
 - funcția f să fie continuă la dreapta în punctul $x = 0$; ④
 - funcția f să fie continuă în punctul $x = 0$. ④
 - În cazurile a) și b) să se calculeze saltul funcției f în punctul $x = 0$. ④
- Arătați că ecuația $\ln x + 2x = 0$ are o soluție x_0 în intervalul $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$. ④
- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
 - $x^4 - 4x^2 < 0$; ④
 - $(x^2 - 4) \ln x > 0$. ④
- Determinați asimptotele graficului funcției $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$. ⑤

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–17	16–11	10–7	6–4	3–2	1–0

Definiția continuității

Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) se numește **continuă în punctul** $x_0 \in E$ dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **continuă pe** E dacă ea este continuă în orice punct $x \in E$.

Criterii de continuitate

Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) este continuă în punctul $x_0 \in E$ dacă este adevărată una dintre **propozițiile**:

- $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$.
- Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in E$ din $|x - x_0| < \delta$ rezultă că $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Cauchy).
- Pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in E$, din $x_n \rightarrow x_0$ rezultă că $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ când $n \rightarrow \infty$.

Clase de funcții continue

- Fie f și g funcții continue. Atunci αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$) sunt funcții continue.
- Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.
- Orice funcție elementară este continuă pe tot domeniul ei de definiție.

Continuitatea la stânga (dreapta)

Funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) se numește **continuă la stânga (dreapta) în punctul** $x_0 \in E$ dacă există limita ei la stânga (dreapta) în x_0 și $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ ($f(x_0 + 0) = f(x_0)$).

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Dacă funcția f nu este continuă în punctul $x_0 \in E$, atunci x_0 se numește **punct de discontinuitate** al acestei funcții.

Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța întâi** pentru funcția f dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite, însă $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

Diferența $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ se numește **saltul funcției în punctul** x_0 .

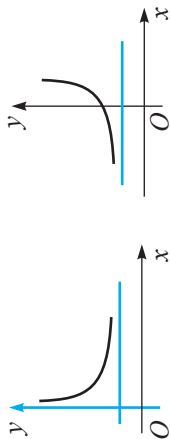
Punctul de discontinuitate x_0 se numește **punct de discontinuitate de speța a doua** dacă cel puțin una dintre limitele laterale $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ este infinită sau nu există.

Proprietăți ale funcțiilor continue

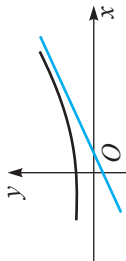
- Teorema (Weierstrass de mărginire).** Orice funcție continuă pe un interval închis este mărginită și își atinge marginile pe acest interval.
- Teorema Bolzano–Cauchy despre anularea funcției.** Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.
- Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

Asimptote

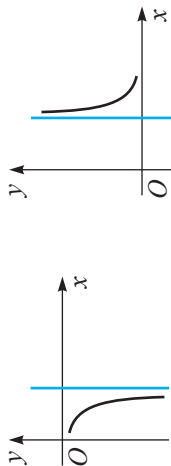
1. Dacă $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), atunci dreapta de ecuație $y = l$ este **asimptotă orizontală** la $+\infty$ (la $-\infty$) a graficului funcției f .



2. Dacă există și sunt finite limitele $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ($m \neq 0$) și $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$, atunci dreapta de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$, este **asimptotă oblică** la $+\infty$ a graficului funcției f . (Similar pentru $-\infty$.)



3. Dacă $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$) este $+\infty$ sau $-\infty$, atunci dreapta de ecuație $x = a$ este **asimptotă verticală la stânga (dreapta)** a graficului funcției f .



Obiective

- ⇒ *utilizarea în diverse contexte, inclusiv în comunicare, a terminologiei aferente noțiunilor *derivata funcției* și *diferențiala funcției*;
- ⇒ *aplicarea definiției derivatei la calculul derivatelor unor funcții elementare; utilizarea în diferite contexte a formulelor obținute;
- ⇒ *aplicarea regulilor de derivare și a formulelor derivatelor la rezolvarea problemelor;
- ⇒ *calculul diferențialelor unor funcții elementare și utilizarea formulelor respective în multiple contexte;
- ⇒ *utilizarea proprietăților funcțiilor derivabile la rezolvarea problemelor;
- ⇒ *conceperea metodelor calculului diferențial ca metode noi de rezolvare a unor probleme teoretice și practice, de identificare și explicare a unor procese și fenomene utilizând derivata funcției, funcțiile derivabile și diferențiala funcției.



I. Newton

Probleme diverse de matematică (studiul variației funcției și trasarea graficului ei, probleme de maxim și minim etc.), de fizică (viteza și accelerația unui mobil, intensitatea curentului electric, densitatea liniară de masă a unei bare metalice etc.), de economie (costurile și beneficiile), probleme de calcul aproximativ, precum și altele, în care prezintă interes rata vreunei schimbări, se rezolvă prin aplicarea directă a noțiunii *derivata funcției*, care este unul dintre conceptele fundamentale ale *analizei matematice*. Istoria atribuie în egală măsură acest concept savanților I. Newton¹ și G. W. Leibniz².

Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor poartă denumirea de *calcul diferențial*. Obiectul calculului diferențial îl constituie funcțiile, iar *derivata* unei funcții reprezintă măsura în care funcția reacționează la schimbarea argumentului.



G. W. Leibniz

¹ Isaac Newton (1642–1727) – fizician, matematician și astronom englez.

² Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) – filozof și matematician german.

§1 Noțiunea de derivată

Noțiunea *derivata funcției* este bazată pe noțiunile *creșterea argumentului* și *creșterea funcției*.

1.1. Creșterea argumentului și creșterea funcției

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, unde intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ și x un punct arbitrar dintr-o vecinătate oarecare a punctului x_0 .

Definiție. Diferența $x - x_0$ se numește **creșterea argumentului** x în punctul x_0 .

Se notează: $x - x_0 = \Delta x$.

Definiție. Diferența $f(x) - f(x_0)$ se numește **creșterea funcției** f în punctul x_0 corespunzătoare creșterii argumentului cu Δx .

Se notează: $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Din $x - x_0 = \Delta x$ rezultă că $x = x_0 + \Delta x$.

Atunci $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Exercițiu rezolvat

☛ Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Să se calculeze Δx și Δf , dacă $x_0 = 1$ și:

- a) $x = 1,5$; b) $x = 0,9$.

Rezolvare:

- a) $\Delta x = x - x_0 = 1,5 - 1 = 0,5$;

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1,5) - f(1) = 2 \cdot 1,5 - 2 \cdot 1 = 1;$$

- b) $\Delta x = x - x_0 = 0,9 - 1 = -0,1$;

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = 2 \cdot 0,9 - 2 \cdot 1 = -0,2.$$

Observație. Atât creșterile argumentului, cât și creșterile funcției pot fi pozitive, negative sau nule.

Interpretarea geometrică a creșterilor Δx și $\Delta f(x_0)$ este reprezentată în figura 4.1.

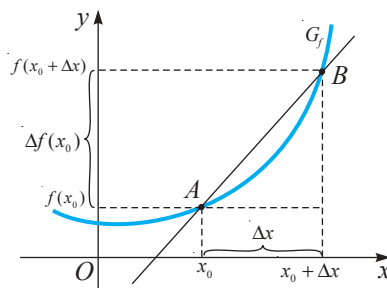


Fig. 4.1

1.2. Probleme care au condus la noțiunea de derivată

Două probleme clasice, una de geometrie (despre tangenta la o curbă plană) și alta de fizică (despre viteza instantanee a unui mobil), au condus la noțiunea de derivată. Aceste probleme au fost cercetate și rezolvate de G. W. Leibniz și respectiv de I. Newton.

1.2.1. Tangenta la graficul unei funcții (la o curbă plană)

Fie I un interval deschis și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funcție continuă.

Observație. Funcția este continuă pe un interval dacă graficul acesteia poate fi trasat pe acest interval fără a ridica creionul de pe hârtie.

Graficul $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ al funcției f este o curbă de ecuație $y = f(x)$ (fig. 4.2). Fie $x_0 \in I$, punctele $A(x_0, f(x_0)) \in G_f$, $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) \in G_f$ și dreapta AB – o secantă (față de graficul G_f) ce formează cu axa Ox unghiul β . Când pe curba G_f punctul B se apropie de punctul A , adică atunci când $\Delta x \rightarrow 0$, secanta AB ocupă poziții diferite ($AB_1, AB_2, \dots, AT$).

Spunem că dreapta AT este **tangentă** la graficul funcției f în punctul $A(x_0, f(x_0))$ dacă această dreaptă coincide cu poziția limită (în cazul în care o astfel de poziție există) a secantei AB când $\Delta x \rightarrow 0$ (fig. 4.2).

Tangenta la graficul funcției f în punctul dat $A(x_0, f(x_0))$ poate fi determinată dacă este cunoscută panta ei.

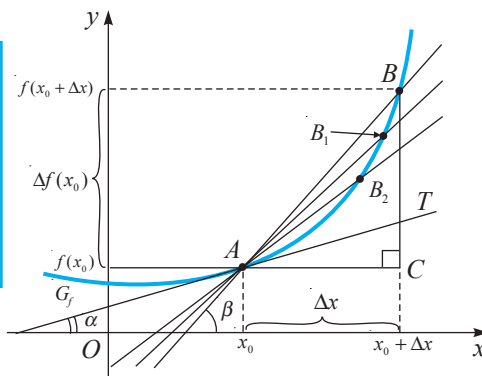


Fig. 4.2

Reamintim!

Panta m (sau **coeficientul unghiular m**) a dreptei de ecuație $y = mx + b$ este egală cu tangenta unghiului pe care îl formează această dreaptă cu direcția pozitivă a axei Ox .

Cum $m(\angle C) = 90^\circ$ (fig. 4.2), din $\triangle ACB$ obținem coeficientul unghiular $m(\Delta x)$ al secantei AB :

$$m(\Delta x) = \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \frac{BC}{AC} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Trecerea la limită în formula (1), când $\Delta x \rightarrow 0$, conduce la studiul limitei:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Valoarea finită a acestei limite (dacă limita există) este coeficientul unghiular al dreptei tangente la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$. Deci,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = m. \quad (2)$$

Așadar, problema existenței tangentei la graficul funcției f într-un punct dat $A(x_0, f(x_0))$ este în corelație cu problema existenței limitei (2).

1.2.2. Viteza instantanee a unui mobil

Fie un mobil se mișcă în sensul pozitiv pe o axă l conform legii $s = s(t)$, unde $s(t)$ este abscisa punctului în care se află mobilul în momentul t . Altfel spus, abscisa este *distanța parcursă (spațiul parcurs)* de mobil în timpul t (fig. 4.3).

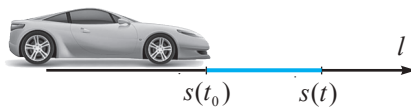


Fig. 4.3

Dacă mișcarea mobilului este uniformă, atunci pentru orice momente t_0, t_1 ($t_1 \neq t_0$) valoarea raportului $\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ este constantă și este egală cu viteza mobilului.

Dacă însă mișcarea mobilului nu este uniformă, viteza lui nu este constantă. Să considerăm un moment t_0 de referință. Pentru intervalul de timp $[t_0, t]$ raportul dintre distanța parcursă și timpul scurs, $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ (3), se numește **viteza medie** a mobilului.

Mișcări uniforme practic nu există, dar pe intervale de timp din ce în ce mai mici, mișcarea mobilului tinde să devină uniformă. În aceste condiții, pentru $t \rightarrow t_0$, $t \neq t_0$, viteza medie respectivă tinde la un număr, care în fizică se numește **viteza instantanee a mobilului în momentul t_0** .

Așadar, definim viteza instantanee $v(t_0)$ a mobilului în momentul t_0 ca fiind limita (dacă aceasta există) la care tinde raportul (3) când $t \rightarrow t_0$, adică

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (4)$$

În mod similar, dacă $v(t)$ este viteza instantanee a mobilului în orice moment t , atunci **acelerația instantanee $a(t_0)$ a mobilului în momentul t_0** se definește ca fiind limita (dacă aceasta există) la care tinde raportul $\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$ când $t \rightarrow t_0$, adică

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (5)$$

Exemplele prezentate demonstrează importanța studierii limitei raportului dintre creșterea funcției și creșterea argumentului când creșterea argumentului tinde la zero, deci a limitei

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6)$$

1.3. Noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct

Definiție. Fie intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ și funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se spune că funcția f **are derivată în punctul x_0** dacă există limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Această limită se numește **derivata funcției f în punctul x_0** și se notează $f'(x_0)$.

Dacă, în plus, limita este finită, funcția f se numește **derivabilă în punctul** x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ sau } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (7)$$

Notăția $f'(x_0)$ se citește: *ef prim în punctul* x_0 .

Observații. 1. În cazul în care limita (7) este infinită sau nu există, funcția f **nu este derivabilă în punctul** x_0 .

2. În studiul derivabilității unei funcții într-un punct intervin doar valorile funcției respective într-o vecinătate a acestui punct. Din aceste motive se mai spune că **derivabilitatea funcției**, similar cu limita și *continuitatea funcției, **este o proprietate locală a acesteia**.

3. În continuare vom studia derivata funcției pe un interval deschis I (dacă nu se specifică altceva).

Atenție! 1. Revenind la exemplele din fizică (formulele (4) și (5)), deducem:

- $v(t_0) = s'(t_0)$ – viteza instantanee a unui mobil în momentul t_0 este valoarea derivatei distanței (spațiului) în t_0 ;
- $a(t_0) = v'(t_0)$ – accelerația instantanee a unui mobil în momentul t_0 este valoarea derivatei vitezei în t_0 .

2. Formulele $v(t) = s'(t)$ și $a(t) = v'(t)$ exprimă sensul fizic (mecanic) al derivatei: *derivata distanței s în raport cu timpul t este viteza v a mișcării unui mobil, iar derivata vitezei v în raport cu timpul t este accelerația a a acelui mobil.*

Definiții. • Se spune că funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) **este derivabilă pe mulțimea** M ($M \subseteq I$) dacă ea este derivabilă în orice punct din M .

• În acest caz, funcția $f': M \rightarrow \mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct $x \in M$ numărul real $f'(x)$, se numește **derivata funcției f pe mulțimea M** .

• Operația prin care din f se obține f' se numește **derivare**.

Observație. Derivata funcției f se notează: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{d}{dx}(f)$, y' , f' , unde $y = f(x)$.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și să se calculeze derivata ei, dacă:

- $f(x) = 2x$;
- $f(x) = x^2$.

Rezolvare:

a) Funcția f definită prin formula $f(x) = 2x$ este derivabilă în orice punct din $\mathbb{R}$, deoarece limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{\Delta x} = 2$ există pentru orice

$x_0 \in \mathbb{R}$. Deci, $f'(x) = (2x)' = 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Funcția f definită prin formula $f(x) = x^2$ este derivabilă în orice punct din $\mathbb{R}$, deoarece limita $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$ există pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$. Deci, $(x^2)' = 2x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Din definiția derivatei rezultă următorul *algoritm de calcul al derivatei unei funcții* $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ într-un punct și pe o mulțime:

- ① Se ia o creștere arbitrară Δx a argumentului x în punctul x_0 , astfel încât $x_0 + \Delta x \in I$.
- ② Se determină creșterea funcției f în punctul x_0 : $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- ③ Se alcătuiește raportul $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- ④ Se calculează limita acestui raport: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.
- ⑤ Se trage concluzia referitoare la derivabilitatea funcției f în punctul x_0 .
- ⑥ Se studiază derivabilitatea funcției f pe intervalul I .

Definiție. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Mulțimea punctelor în care funcția f este derivabilă se numește **domeniul de derivabilitate al funcției** f .

Se notează: $D_{f'}$. Evident, $D_{f'} \subseteq I$.

Observație. În continuare, în cazul în care nu este indicat domeniul de definiție al funcției f , se va considera că această funcție este definită pe domeniul ei maxim de definiție.

1.4. Derivabilitate și continuitate

O condiție necesară de existență a derivatei unei funcții într-un punct este formulată în

Teorema 1. Dacă o funcție este derivabilă într-un punct, atunci ea este continuă în acest punct.

Demonstrație

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ un punct în care funcția f este derivabilă, adică există și este finită limita (6). Din relația $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$, $\Delta x \neq 0$, $x \in D$,

rezultă că $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$.

Deci, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, adică $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,

de unde rezultă că funcția f este continuă în x_0 . ►

Reciproca acestei teoreme este falsă. De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, este continuă în punctul $x_0 = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct (fig. 4.4).

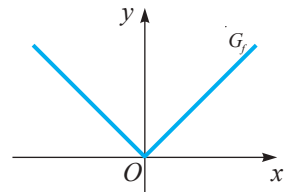


Fig. 4.4

Pentru a demonstra această propoziție, vom calcula limita raportului $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$ în punctul $x_0 = 0$. Calculăm limitele laterale ale funcției f în x_0 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$.

Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x}$, rezultă că limita raportului $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ în punctul $x_0 = 0$ nu există. Deci, funcția f , continuă în $x_0 = 0$, nu este derivabilă în acest punct.

1.5. Derivate laterale

În anumite situații vom studia limitele laterale ale raportului $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Definiție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I – interval deschis) și $x_0 \in I$. Limita $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (dacă aceasta există), finită sau infinită, se numește **derivata la stânga a funcției f în punctul x_0** și se notează $f'_s(x_0)$.

$$\text{Rețineți: } f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (8)$$

Definiție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I – interval deschis) și $x_0 \in I$. Limita $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (dacă aceasta există), finită sau infinită, se numește **derivata la dreapta a funcției f în punctul x_0** și se notează $f'_d(x_0)$.

$$\text{Rețineți: } f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (9)$$

Definiție. Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **derivabilă la stânga** (respectiv **derivabilă la dreapta**) în punctul $x_0 \in I$ dacă limita (8) (respectiv limita (9)) există și este finită.

Astfel, revenind la exemplul precedent, conchidem că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, este derivabilă la stânga și la dreapta în punctul $x_0 = 0$: $f'_s(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$.

Reamintim că unul dintre criteriile de existență a limitei unei funcții într-un punct constă în egalitatea limitelor ei laterale în acest punct. Un criteriu similar există și pentru studiul derivabilității unei funcții într-un punct.

Teorema 2. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă ea este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$. În acest caz, $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Demonstrația teoremei 2 rezultă direct din teorema 2, modulul 2, secvența 1.3.

Observație. Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. În punctele a și b putem vorbi doar despre derivata la dreapta, respectiv la stânga, în aceste puncte. Nu are sens problema derivatei la stânga în a și nici a derivatei la dreapta în b .

Exemple

1. Pentru funcția $f(x) = |x|$ avem $f'_s(0) = -1$ și $f'_d(0) = 1$. Cum $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, rezultă că funcția f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$.
2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2|x-1|}$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$, deoarece derivatele ei laterale există, dar sunt infinite. (Verificați!)
3. Fie funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$ Există $f'_d(0) = 1$, însă nu există $f'_s(1)$, deoarece f nu este nici continuă în $x = 1$.

Exerciții propuse

Profilul real

- A₁** 1. Să se calculeze, în punctul $x_0 = \frac{1}{2}$, creșterea argumentului și creșterea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, dacă: a) $x = 2$; b) $x = 0,7$; c) $x = -\sqrt{3}$; d) $x = -4,2$.
2. Să se calculeze derivata funcției:
 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$;
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$; d) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
3. Să se calculeze, aplicând definiția derivatei, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(10)$, dacă:
 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5x$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$.
4.  **Lucrați în perechi!** Să se traseze dreptele ce trec prin punctul $(1, 3)$ și au panta:
 a) -1 și $\sqrt{3}$; b) 1 și $-\sqrt{3}$; c) 0 și $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- În fiecare caz, să se determine ce tip de unghi formează aceste drepte cu direcția pozitivă a axei absciselor.

- B₁** 5. Să se studieze derivabilitatea funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
 a) $f(x) = |x - 2|$, în $x_0 = 2$; b) $f(x) = |x^2 - 4|$, în $x_0 = -2$, $x_1 = 2$;
 c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, în $x_0 = 1$.

6. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ în punctele x_0 și x_1 :
- a) $f(x) = x + |x|$, $x_0 = 0$, $x_1 = -2$; b) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$;
 c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $x_0 = 0,5$, $x_1 = 1$; d) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$.
7.  **Investigați!** Să se studieze, în punctul $x_0 = 0$, continuitatea și derivabilitatea funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = |\sin x|$; b) $f(x) = |\cos x|$;
 c) $f(x) = \frac{2}{|x+1|}$; d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 2x^2 + x, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$
- C₁** 8. Să se afle:
- a) $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0 = 0$;
 b) $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0 = 0$.
9. Să se afle $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2 \ln x, & \text{dacă } 0 < x \leq e \\ mx + n, & \text{dacă } x > e, \end{cases}$ să fie derivabilă în orice punct $x \in (0, +\infty)$.
10. Să se afle valorile parametrilor reali a, b și c , astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x < 0 \\ ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ să fie derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

§2 Interpretarea geometrică a derivatei

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) o funcție derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și G_f graficul ei (fig. 4.5).

Prezentăm, fără demonstrație, două teoreme.

Teorema 3. Dacă funcția f este derivabilă în punctul x_0 , atunci la graficul ei în punctul $(x_0, f(x_0))$ poate fi trasată o tangentă neverticală, având panta egală cu $f'(x_0)$.

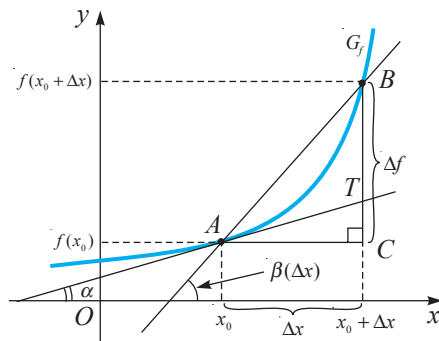


Fig. 4.5

Teorema 4. Dacă la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$ poate fi trasată o tangentă neverticală, atunci funcția f este derivabilă în punctul x_0 și panta m a acestei tangente este egală cu valoarea derivatei funcției f în punctul x_0 ($m = f'(x_0)$).

Sensul geometric al derivatei unei funcții f derivabile într-un punct x_0 rezultă din teoremele 3 și 4: existența derivatei finite a funcției f în punctul x_0 este echivalentă cu existența tangentei neverticale la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, astfel încât panta acestei tangente este egală cu $f'(x_0)$.

Rețineți: Tangenta la graficul funcției f derivabile în punctul x_0 este dreapta ce trece prin punctul $(x_0, f(x_0))$, a cărei pantă m este egală cu $f'(x_0)$, adică $m = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Să determinăm ecuația tangentei în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului funcției f derivabile în x_0 . Știind că ecuația dreptei care are coeficientul unghiular $f'(x_0)$ este $y = f'(x_0) \cdot x + b$, să determinăm coeficientul b . Cum tangenta trece prin punctul $(x_0, f(x_0))$, obținem că $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, de unde $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Astfel, **tangenta** în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului funcției f derivabile în punctul x_0 este **dreapta de ecuație**

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (*)$$

Exerciții rezolvate

❖ 1. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, în punctul de abscisă $x_0 = 2$.

Rezolvare:

$f'(x) = (x^2)' = 2x$. Atunci $f'(x_0) = 2 \cdot 2 = 4$, iar $f(x_0) = 2^2 = 4$. Substituind în (*), obținem $y = 4 + 4 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$, care este ecuația cerută a tangentei.

Observație. Dacă $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = +\infty$ sau $f'(x_0) = -\infty$), atunci dreapta tangentă în punctul $(x_0, f(x_0))$ al graficului G_f al funcției f continue în punctul x_0 este paralelă cu axa Oy , adică tangenta are ecuația $x = x_0$.

Dacă $f'(x_0) = +\infty$, atunci în vecinătatea punctului $A(x_0, f(x_0))$ graficul G_f are forma reprezentată în figura 4.6:

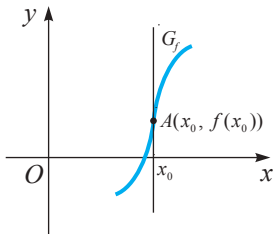


Fig. 4.6

Dacă $f'(x_0) = -\infty$, atunci în vecinătatea punctului $A(x_0, f(x_0))$ graficul G_f are forma reprezentată în figura 4.7:

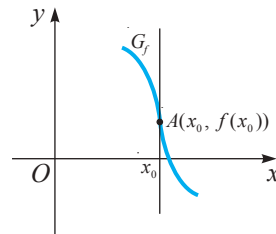


Fig. 4.7

❖ 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se afle măsura unghiului format de tangenta la graficul G_f în punctul de abscisă x_0 și de direcția pozitivă a axei Ox , dacă:

- a) $x_0 = 0$; b) $x_0 = \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

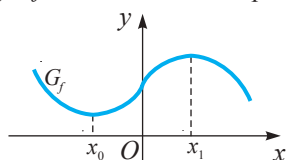
Deoarece panta tangentei este $m = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, unde α este măsura unghiului format de tangenta la graficul G_f în punctul de abscisă x_0 și de direcția pozitivă a axei Ox , obținem:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, deci $\alpha = 0$; b) $\operatorname{tg} \alpha = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, deci $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

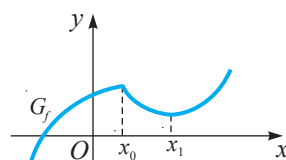
Exerciții propuse

Profilul real

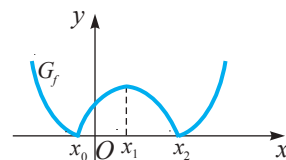
- A₁** 1.  **Investigați!** Să se determine, utilizând interpretarea geometrică a derivatei, dacă funcția f este derivabilă în punctele de abscise indicate:



a)



b)



c)

2.  **Lucrați în perechi!** Să se traseze graficul unei funcții care nu este derivabilă în punctele $x_0 = 3$ și $x_1 = 5$.
3. Să se scrie, aplicând definiția derivatei sau formula respectivă, ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0 :
- a) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = 2x^2 - 1$, $x_0 = 0$; c) $f(x) = 2 - x^2$, $x_0 = -2$.
4. Să se afle măsura unghiului format de tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 și de direcția pozitivă a axei Ox :
- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$, $x_0 = 1$.
5.  **Lucrați în perechi!** Să se traseze graficul unei funcții, astfel încât tangenta la acest grafic în punctul de abscisă $x_0 = -1$ să fie dreapta de ecuație:
- a) $y = 0$; b) $y = 2$.

- B₁** 6. Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctele specificate și să se interpreteze geometric rezultatul obținut:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 9|$, $x_0 = -3$, $x_1 = 3$;
 b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\lg x - 1|$, $x_0 = 10$.

7. Aplicând definiția derivatei, să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$, în punctul de abscisă:

1) $x_0 = -0,5$, 2) $x_0 = 2$, 3) $x_0 = -5$;

- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, în punctul de abscisă:

1) $x_0 = \frac{\pi}{4}$, 2) $x_0 = \frac{\pi}{3}$, 3) $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

8.  **Lucrați în perechi!** a) Să se determine pentru fiecare dintre funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 2x^2 - x, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geq 0 \\ x^2, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad h(x) = |x^2 - 9|:$$

- 1) mulțimea punctelor pe care funcția este continuă;
 2) mulțimea punctelor pe care funcția este derivabilă.

- b) Să se schițeze graficele acestor funcții.

9. La graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 8x - 9$, este trasată tangenta paralelă cu axa absciselor. Să se determine coordonatele punctului de tangență.

10. Să se determine coordonatele punctului în care tangenta, dusă la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, este paralelă cu dreapta $4x - y + 1 = 0$.
11. Să se afle măsura unghiului de intersecție a tangentelor duse la graficele funcțiilor $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, și $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.
12. Să se determine punctele ce aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 4x^2$, astfel încât tangentele trasate în aceste puncte să formeze un unghi de $\frac{\pi}{4}$ cu axa Ox .
13. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 13$, dacă tangenta trece prin punctul $A(2, 8)$.
- C₁** 14. Să se afle coeficienții $b, c \in \mathbb{R}$, știind că în punctul de coordonate $(-1, -2)$ parabola $f(x) = x^2 + bx + c$ are ca tangentă dreapta de ecuație $y = 2x$.
15. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, și $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\pi + 2 \ln x}{4}$.
- a) Să se demonstreze că graficele funcțiilor f și g sunt tangente.
b) Să se scrie ecuația tangentei comune.
16.  **Investigați!** Să se dea exemple de funcții derivabile pe un interval:
a) cu excepția unui punct; b) cu excepția a două puncte.

§3 Derivatele unor funcții elementare

Exercițiu. Fie $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x$. Să se calculeze derivata funcției f .

Pentru a calcula derivata funcției f , precum și derivatele altor funcții, este util să fie cunoscute formulele de calcul al derivatelor funcțiilor elementare.

3.1. Funcția constantă

Teorema 5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Fie x_0 un punct arbitrar din $\mathbb{R}$. Avem $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$.

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 

Rețineți: $c' = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(1)

Exemplu

Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2020$, obținem $(2020)' = 0$.

Observație. A se face distincție între numerele $f'(x_0)$ și $(f(x_0))'$, ultimul fiind 0 ca derivata unei funcții constante.

3.2. Funcția identică

Teorema 6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Fie x_0 un punct arbitrar din $\mathbb{R}$. Avem $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1$.

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

Rețineți: $x' = 1$. (2)

3.3. Funcția putere cu exponent real

Teorema 7. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Rețineți: $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\forall x \in (0, +\infty)$; (3)

$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \geq 1$, $\forall x \in [0, +\infty)$. (3')

Observații. 1. Pentru $\alpha \geq 1$, funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, este derivabilă și în $x_0 = 0$.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Aplicând formula (3), obținem:

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

4. $(\sqrt[2n+1]{x})' = \frac{1}{(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{2n}}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

5. Funcția definită prin formula $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$ (deoarece derivatele laterale în punctul 0 sunt infinite).

Exercițiu rezolvat

☞ Să se calculeze:

a) $(x^{-\sqrt{2}})'$; b) $(\sqrt{x})'$; c) $(\sqrt[3]{x})'$.

Rezolvare:

a) $(x^{-\sqrt{2}})' = -\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}-1}$; b) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

c) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Relația $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ are loc și pentru orice $x \in (-\infty, 0)$.

$$\text{Rețineți: } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x \in (0, +\infty). \quad (4)$$

Pentru funcția radical $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, obținem:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad \forall x \in D \setminus \{0\}. \quad (5)$$

3.4. Funcția sinus

Teorema 8. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

$$\begin{aligned} \text{Fie } x_0 \text{ un punct arbitrar din } \mathbb{R}. \text{ Avem } f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x_0. \end{aligned}$$

Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ►

$$\text{Rețineți: } (\sin x)' = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

3.5. Funcția cosinus

Teorema 9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Funcția cosinus este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Rețineți: } (\cos x)' = -\sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Exercițiu. Demonstrați teorema 9.

3.6. Funcția exponențială

Teorema 10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Rețineți: } (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Consecință. Aplicând formula (8), obținem $(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rețineți: $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (8')

De exemplu:

a) $(2^x)' = 2^x \ln 2$; b) $((0,3)^x)' = (0,3)^x \ln 0,3$.

3.7. Funcția logaritmică

Teorema 11. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Rețineți: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (9)

Exercițiu. Demonstrați teorema 11.

Teorema 12. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Rețineți: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (10)

Exercițiu. Demonstrați teorema 12.

Indicație. Se va ține cont de definiția derivatei, de formula $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ și de formula (9).

De exemplu:

a) $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$; b) $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate D_f :

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^8$;

b) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-7}$;

c) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$;

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 3^x$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

f) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$;

g) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$;

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

2. Să se calculeze valoarea derivatei funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \log_7 x$, în $x_0 = 7$; b) $f(x) = \lg x$, în $x_0 = \frac{1}{10}$;
 c) $f(x) = x^2$, în $x_0 = 60$; d) $f(x) = \sqrt{x}$, în $x_0 = 49$;
 e) $f(x) = 2^x$, în $x_0 = 5$; f) $f(x) = 25$, în $x_0 = -64$.

3.  **Lucrați în perechi!** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0 :

- a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$;
 c) $f(x) = \log_8 x$, $x_0 = 2$; d) $f(x) = x^5$, $x_0 = -1$.

4. Să se afle $f'(0)$ și $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, dacă:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$.

B₁ 5. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate $D_{f'}$:

- a) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x}$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[5]{x^2}$.

6. Să se calculeze derivata funcției f și să se determine domeniul de derivabilitate $D_{f'}$, dacă $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; b) $f(x) = \sqrt{|x|}$;
 c) $f(x) = \log_{0,4}(x^2)$; d) $f(x) = 2^{|x|}$.

7. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = |\cos x|$, în $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
 b) $f(x) = |2x|$, în $x_0 = 0$;
 c) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ -2x, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ în $x_0 = 0$.

8. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ în punctul de abscisă x_0 :

- a) $f(x) = 7x^2$, $x_0 = -3$; b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;
 c) $f(x) = \log_{27}(x^3)$, $x_0 = 27$; d) $f(x) = 2,5^x$, $x_0 = 1$.

C₁ 9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + n, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$ Să se determine valorile parametrilor reali m și n , astfel încât funcția f să fie derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

10.  **Investigați!** Să se determine valorile parametrilor reali m și n , astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} me^{2x} + n, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ \sin 2x + n \cos 2x, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ să fie:

- a) continuă pe $\mathbb{R}$; b) derivabilă pe $\mathbb{R}$.

11. (BAC, 2007). Determinați valorile reale ale lui a pentru care tangenta la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$, în punctul de abscisă $x_0 = a$ intersectează axa absciselor în unul dintre punctele intervalului $[0, 1]$.

§4 Operații cu funcții derivabile

4.1. Derivata sumei, a produsului și a câtului

Exercițiu. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = e^x$, $c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze:

- a) $(f + g)'$; b) $(c \cdot f)'$; c) $(f - g)'$;
 d) $(f \cdot g)'$; e) $\left(\frac{f}{g}\right)'$; f) $((f \circ g))'$.

Pentru a rezolva acest exercițiu, trebuie să cunoaștem regulile de calcul al derivatelor.

Teorema 13. Dacă funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, atunci funcția $f + g$ este derivabilă în x_0 și

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} \text{Avem } (f + g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + \Delta x) - (f + g)(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Corolar. Dacă funcțiile f și g sunt derivabile pe intervalul I , atunci funcția $f + g$ este derivabilă pe I și $(f + g)' = f' + g'$. (1)

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x) = x^3 + e^x$, conform formulei (1), obținem:

$$(x^3 + e^x)' = (x^3)' + (e^x)' = 3x^2 + e^x.$$

Observație. Aplicând metoda inducției matematice, se poate arăta că suma $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ a n funcții derivabile pe intervalul I este o funcție derivabilă pe I și

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)' = \sum_{k=1}^n f_k'. \quad (1')$$

Exercițiu. Deduceți formula (1').

Teorema 14. Dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și $c \in \mathbb{R}$, atunci funcția $c \cdot f$ este derivabilă în x_0 și $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$.

Exercițiu. Demonstrați teorema 14.

Corolar. 1. Dacă funcția f este derivabilă pe intervalul I și $c \in \mathbb{R}$, atunci funcția $c \cdot f$ este derivabilă pe I și $(c \cdot f)' = c \cdot f'$. (2)

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{3} \cdot e^x$, obținem $(\sqrt{3} \cdot e^x)' = \sqrt{3} \cdot (e^x)' = \sqrt{3}e^x$.

2. Pentru $c = -1$ avem $(-f)' = -f'$.

3. Dacă funcțiile f, g sunt derivabile pe intervalul I , atunci funcția $f - g$ este derivabilă pe I și $(f - g)' = f' - g'$. (3)

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - e^x$, obținem:

$$(x^3 - e^x)' = (x^3)' - (e^x)' = 3x^2 - e^x.$$

Teorema 15. Dacă funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, atunci funcția $f \cdot g: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Demonstrație

Fie $x_0 \in I$. Funcția g , fiind derivabilă în x_0 , este și continuă în x_0 , adică $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Atunci } (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Corolar. Dacă funcțiile f, g sunt derivabile pe intervalul I , atunci funcția $f \cdot g$ este derivabilă pe I și

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \quad (4)$$

Exemplu

Pentru funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^3 \cdot e^x$, obținem:

$$(x^3 \cdot e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

Observație. Aplicând metoda inducției matematice, se poate arăta că produsul $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$ a n funcții derivabile pe intervalul I este o funcție derivabilă pe I și

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n'.$$

Teorema 16. Dacă funcțiile $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$

și $g(x_0) \neq 0$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrație

Cum funcția g este continuă și $g(x_0) \neq 0$, rezultă că există o vecinătate $V(x_0)$ în care $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V(x_0)$. Considerăm Δx , astfel încât $x_0 + \Delta x \in V(x_0)$. Atunci

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$), deoarece funcția g este continuă în x_0). ►

Corolar. 1. Dacă funcțiile f, g sunt derivabile pe intervalul I și $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe I și

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}. \quad (5)$$

2. Pentru $f=1$, aplicând formula (5), obținem:

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \quad (6)$$

Exercițiu rezolvat

☞ Să se calculeze derivata funcției $h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^3}{e^x}$.

Rezolvare:

$$h'(x) = \left(\frac{x^3}{e^x}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot e^x - x^3 \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{3x^2 e^x - x^3 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2 e^x (3 - x)}{e^{2x}} = \frac{x^2 (3 - x)}{e^x}.$$

4.2. Derivata funcțiilor tangentă, cotangentă

Teorema 17. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ și $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Demonstrație

$$\begin{aligned} f'(x) = (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$\text{Rețineți: } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (7)$$

Teorema 18. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ și $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\text{Rețineți: } (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (8)$$

Exercițiu. Demonstrați teorema 18.

4.3. Derivarea funcției compuse

Teorema 19. Fie I_1, I_2 intervale și funcțiile $f: I_1 \rightarrow I_2$, $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția f este derivabilă în $x_0 \in I_1$, iar funcția g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0) \in I_2$, atunci funcția compusă $h = g \circ f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I_1$ și $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Reținem regula de derivare a funcției compuse:

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x), \quad \forall x \in I \quad (9)$$

Corolar. Dacă funcțiile $f: I_1 \rightarrow I_2$, $g: I_2 \rightarrow I_3$, $h: I_3 \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile, atunci funcția compusă $p(x): I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = (h \circ g \circ f)(x)$ este derivabilă pe I_1 și

$$p'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (10)$$

Exercițiu rezolvat

☞ Să se calculeze derivata funcției:

a) $h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2^{3x}$;

b) $p: D \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \log_2 \cos 2x$.

Rezolvare:

a) $(2^{3x})' = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot (3x)' = \ln 8 \cdot 2^{3x}$.

b) $(\log_2 \cos 2x)' = \log_2'(\cos 2x) \cdot \cos'(2x) \cdot (2x)' =$
 $= \frac{1}{\cos 2x \cdot \ln 2} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x \ln 2} = -\frac{2 \operatorname{tg} 2x}{\ln 2}$.

4.4. Derivarea funcției inverse

Teorema 20. Fie $f: I \rightarrow J$ ($I, J \subseteq \mathbb{R}$) o funcție continuă și inversabilă. Dacă funcția f este derivabilă în $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}: J \rightarrow I$, unde $J = f(I)$, este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Observație. Fie funcția $f: I \rightarrow J$ strict monotonă, derivabilă pe intervalul I și $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Prin urmare, funcția inversă $f^{-1}: J \rightarrow I$ este derivabilă pe intervalul J și

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall y \in J, \text{ unde } y = f(x) \quad (11)$$

Exerciții rezolvate

1. Derivata funcției arcsinus

Fie funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

În orice punct $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $(\sin)'(x_0) = \cos x_0 \neq 0$ și sunt verificate condițiile teoremei 20. Astfel, funcția $f^{-1} = \arcsin$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in (-1, 1)$.

Notăm $y_0 = \sin x_0$. Atunci $\arcsin y_0 = x_0$. Aplicând formula (11), obținem:

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}, \quad \forall y_0 \in (-1, 1).$$

Revenind la notațiile uzuale, reținem formula:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (12)$$

2. Derivata funcției arccosinus

Fie funcția $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

Raționând în mod analog sau aplicând relația $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, obținem formula:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in (-1, 1) \quad (13)$$

3. Derivata funcției arctangentă

Fie funcția $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

În orice punct $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $(\operatorname{tg})'(x_0) = \frac{1}{\cos^2 x_0} \neq 0$ și sunt verificate condițiile teoremei 20. Astfel, funcția $f^{-1} = \operatorname{arctg}$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in \mathbb{R}$, unde $y_0 = \operatorname{tg} x_0$.

$$\text{Obținem } (\arctg)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x_0}} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Revenind la notațiile uzuale, obținem formula:

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

4. Derivata funcției arccotangentă

Fie funcția $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Să se calculeze $(f^{-1})'$.

Rezolvare:

Raționând în mod similar, obținem formula:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

4.5. Derivarea funcției de tipul $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$, $\forall x \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Această funcție, în caz general, nefiind nici funcție putere, nici funcție exponențială, nu poate fi derivată aplicând formulele (3), (8) din § 3, ci aplicând identitatea logaritmică fundamentală $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x) \cdot v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{v(x) \ln u(x)}$, astfel obținută, este o funcție compusă. Derivând-o, obținem:

$$f'(x) = (e^{v(x) \ln u(x)})' = e^{v(x) \ln u(x)} \cdot (v(x) \ln u(x))' = u(x)^{v(x)} \cdot (v(x) \ln u(x))' = f(x) \cdot (\ln f(x))'. \quad (16)$$

De aici rezultă formula pentru derivata funcțiilor de tipul $f(x) = u(x)^{v(x)}$, unde $u(x) > 0$:

$$(u^v)' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right). \quad (17)$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze derivata funcției:

a) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^x$; b) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\sqrt{x}} \lg 5x$ (a se vedea exercițiul de la începutul § 3).

Rezolvare:

a) Conform formulei (16), $f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'$.

Deci, $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x^x)' = x^x (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$.

b) $f'(x) = (x^{\sqrt{x}} \lg 5x)' = (x^{\sqrt{x}})' \cdot \lg 5x + x^{\sqrt{x}} \cdot (\lg 5x)'$. Să calculăm întâi derivata funcției $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{\sqrt{x}}$.

Aplicând formula (17) și formula $(\ln u^v)' = (v \ln u)' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$, obținem

$$(\ln x^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{x^{\sqrt{x}}} \cdot (x^{\sqrt{x}})', \text{ sau } (x^{\sqrt{x}})' = \frac{(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \text{ Atunci}$$

$$f'(x) = \frac{(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}} \cdot \lg 5x}{2\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{x \ln 10} = 0,5(2 + \ln x) \cdot x^{\sqrt{x}-0,5} \cdot \lg 5x + x^{\sqrt{x}-1} \lg e.$$

4.6. Derivate de ordin superior

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I . Valorile lui $f'(x)$ depind, în general, de x , adică derivata funcției f este, la rândul său, o funcție de x . Prin urmare, poate fi pusă problema derivării funcției f' .

Exercițiu rezolvat

☞ Să se calculeze derivata derivatei funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$.

Rezolvare:

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x.$$

$$\text{Atunci } (f'(x))' = (2xe^x + x^2 e^x)' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x = e^x(x^2 + 4x + 2).$$

Definiție. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se spune că **funcția f este derivabilă de două ori într-un punct $x_0 \in I$** dacă funcția f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 și funcția f' este derivabilă în x_0 .

În acest caz, derivata funcției f' în punctul x_0 se numește **derivata de ordinul doi** (sau **derivata a doua**) **a funcției f în punctul x_0** și se notează $f''(x_0)$.

$$\text{Așadar, } f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Observație. Dacă funcția f este derivabilă de două ori în orice punct al intervalului I , atunci se spune că funcția f este derivabilă de două ori pe acest interval.

Exemple

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$, obținem: $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f''(x) = 6x - 6$.

2. Pentru funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$, avem: $g'(x) = -\sin x$, $g''(x) = -\cos x$.

Similar se definește **derivata de ordinul trei** (sau **derivata a treia**) **a funcției f în punctul x_0** . Se notează: $f'''(x_0)$.

*În mod analog se definește **derivata de ordinul n** , $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, **a funcției f în punctul x_0** . Se notează $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$. Uneori, $f^{(n)}(x)$ se notează $\frac{d^n f}{dx^n}$. (Opțional)

Observații. 1. Ordinul derivatei se scrie între paranteze, pentru a nu fi confundat cu exponentul puterii (exclusiv cazurile în care ordinul derivatei se notează cu cifre romane).

2. S-a convenit ca derivata de ordinul zero a funcției f să fie considerată însăși funcția f , adică $f^{(0)} = f$.

Exemple

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, obținem: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$. Aplicând metoda inducției matematice, se poate de-

monstra formula: $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. (Opțional)

2*. Similar obținem formula: $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbb{N}$. (Opțional)

3. Pentru funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x$, obținem: $g'(x) = e^x, g''(x) = e^x, g'''(x) = e^x$.

* **Rețineți:** $(e^x)^{(n)} = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$. (Opțional)

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze: 1) f' ; 2) f'' ; 3) f''' , pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = 5x^6$; b) $f(x) = \pi e^x$; c) $f(x) = -0,5 \log_{\frac{1}{3}} x$;
d) $f(x) = x^3 - 5x^2$; e) $f(x) = 7x^2 - 3x + 2$; f) $f(x) = 2 \log_5 x + 2010$.

2. Să se determine domeniul de definiție D_f , să se calculeze f' și să se determine domeniul de derivabilitate $D_{f'}$ pentru funcția $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = x + \sqrt{x}$; b) $f(x) = \log_3 x + x^5$; c) $f(x) = xe^x$; d) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$;
e) $f(x) = \sqrt[3]{x} \log_{\frac{1}{5}} x$; f) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$; g) $f(x) = \frac{x}{x^3 + 2x}$; h) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;
i) $f(x) = \frac{e^x}{x - 3}$; j) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$; k) $f(x) = -4 \log_2 \sqrt{2x}$.

3. Să se calculeze f' în punctul x_0 , dacă:

- a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x^2}, x_0 = \sqrt{2}$; b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \log_5 2x, x_0 = 0,25$.

4. Dintr-un punct pleacă un mobil care efectuează o mișcare descrisă de ecuația $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 7t$ (s este distanța exprimată în metri, iar t – timpul exprimat în secunde).

Să se determine:

- a) formula de calcul al vitezei mobilului; b) viteza mobilului în momentul $t = 2$ s;
c) peste câte secunde mobilul se va opri.

5.  **Lucrați în perechi!** Dintr-un punct pleacă concomitent două mobile ale căror ecuații de mișcare sunt $s_1(t) = 6t^2 + 4t$ și $s_2(t) = t^3 + 3t^2 + 6t$, unde distanța s se exprimă în metri, iar timpul t – în secunde.

- a) Să se determine momentele de întâlnire a acestor mobile.
b) Să se determine formulele vitezelor și ale accelerațiilor celor două mobile.
c) Să se determine vitezele și accelerațiile mobilelor în momentele de întâlnire.
d) Să se determine momentele în care vitezele și respectiv accelerațiile lor sunt egale.

B₁ 6. Să se calculeze f' pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = x^{25} - \sqrt{x} + \cos x$; b) $f(x) = \sin x + \log_{0,3} x - \sqrt[5]{x}$; c) $f(x) = 5 \ln x + \sqrt{3x} - \frac{5}{x^2}$;
d) $f(x) = \sqrt[6]{2x} + 7e^x - \frac{1}{3}x^{-9}$; e) $f(x) = \sqrt{5} \cos x - 7 \sin x - 4 \ln x$; f) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} \cdot \sin x$;
g) $f(x) = 8x^3 \ln x$; h) $f(x) = 6 - 0,6x^{-5} \log_3 x$; i) $f(x) = 5 \ln(x^2 - 3x)$;
j) $f(x) = \sqrt{2} \log_3 \operatorname{tg} x$; k) $f(x) = 6^{3x} \sin^2 4x$; l) $f(x) = \frac{\cos(3x^2 - 1)}{\ln x}$.

7. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \cos^2 2x$, în $x_0 = \frac{\pi}{3}$; b) $f(x) = \lg^2(3x-1)$, în $x_0 = \frac{2}{3}$; c) $f(x) = x^{\sqrt{x+2}}$, în $x_0 = 1$.

8.  **Lucrați în perechi!** Se consideră funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrilor reali a, b și c , astfel încât funcția f să fie derivabilă în punctul $x_0 = 0$.

9. Să se scrie cel puțin o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a cărei derivată este:

a) $f'(x) = 2 - \cos x$; b) $f'(x) = -2e^{2x}$; c) $f'(x) = 2 \sin 2x$.

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x) = 0$, dacă:

a) $f(x) = 2 \sin^2 x + \sqrt{2}x$; b) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x$.

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f'(x) > 0$, dacă:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$; b) $f(x) = 3x + \cos(6x - \pi)$.

12. Să se calculeze f'' pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6$; b) $f(x) = 2 \sin 3x$; c) $f(x) = 5e^{-2x}$;
d) $f(x) = \sqrt{3-x^2}$; e) $f(x) = \ln x$; f) $f(x) = \arccos \frac{x}{3}$;
g) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; h) $f(x) = \frac{3^{2x}}{(x-1)^2}$; i) $f(x) = (\sqrt{x})^{x-1}$.

13. Să se calculeze $f''(x) - 5f'(x) + 3f(x)$, știind că $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

14. Să se calculeze f''' pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 4$; b) $f(x) = 3 \cos \frac{x}{2}$; c) $f(x) = \sqrt{2}e^{-3x}$;
d) $f(x) = \frac{1}{x-2}$; e) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$; f) $f(x) = \ln(-5x)$.

15.  **Lucrați în perechi!** Un mobil se deplasează conform ecuației de mișcare $s(t) = \sqrt{t}$. Să se demonstreze că accelerația mobilului este proporțională cu cubul vitezei lui.

16. Să se afle forța F ce acționează în momentul $t = 3$ asupra unui mobil de masă m , care efectuează o mișcare descrisă de ecuația $s(t) = 4t^3 - t^2$ (masa m este exprimată în kilograme, distanța s – în metri, timpul t – în secunde).

17. Legea de mișcare a unui mobil cu masa de 5 kg este $S(t) = 5t^2 - 2t + 1$ (masa este exprimată în kilograme, distanța S – în metri, timpul t – în secunde).

- a) Să se afle viteza mobilului în momentul $t = 3$ s.
b) Să se determine accelerația acestui mobil în momentul $t = 5$ s.
c) Să se afle energia cinetică a mobilului în momentul $t = 10$ s.

18.  **Lucrați în perechi!** Un corp este lansat vertical în aer cu viteza inițială de 100 m/s.

- a) Să se afle timpul de ascensiune.
b) Să se determine înălțimea la care ajunge acest corp.
c) Să se afle timpul de cădere.
d) Să se determine viteza cu care corpul atinge solul.

19. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$. Să se arate că $f''(x) + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$.

20. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2x}(\cos x + \sin x)$. Să se arate că $f'''(x) + 4f'(x) + 5f(x) = 0$.

C₁ 21. (BAC, 2018) Fie funcția $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $f'(x) = 2\sqrt{3}f(x)$.

22. Să se calculeze $f'''(0)$, dacă $f(x) = e^{2x} \cdot x^3$.

23.  **Investigați!** Să se afle valorile reale ale parametrilor m și n , astfel încât funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} mx + n, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x-1}{x^2+1}, & \text{dacă } x \in (0, +\infty), \end{cases} \text{ să fie derivabilă pe } \mathbb{R}.$$

§5 Diferențiala unei funcții

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) o funcție derivabilă pe intervalul I și $x_0 \in I$. Atunci, conform definiției derivatei, avem

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Din (1) și din definiția limitei unei funcții într-un punct rezultă că

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad (2)$$

unde $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Folosind relația (2), obținem

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ sau} \\ \Delta f(x_0) &= f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (3)$$

Din relația (3) rezultă că creșterea $\Delta f(x_0)$ a funcției f derivabile în punctul x_0 se exprimă ca o sumă de doi termeni: termenul $f'(x_0) \cdot \Delta x$, care este direct proporțional cu creșterea argumentului, și termenul $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, unde $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ când $\Delta x \rightarrow 0$.

Definiție. Funcția liniară $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$, se numește **diferențiala funcției f în punctul x_0** și se notează $df(x_0)$.

Deci, $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$. (4)

Exercițiu rezolvat

 Să se calculeze diferențiala funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Rezolvare:

Cum $f'(x_0) = 1$, obținem $dx = \Delta x$. În baza relației (4), $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$.

Consecință. Dacă funcția f este derivabilă în orice punct din I , obținem formula:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx, \quad \forall x \in I. \quad (5)$$

Exemple

1. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, obținem:

$$df(x) = d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x dx.$$

2. Pentru funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_8 x$, avem:

$$dg(x) = d(\log_8 x) = \frac{1}{x \ln 8} dx = \frac{dx}{x \ln 8}.$$

Interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții f derivabile într-un punct x_0 este reprezentată în figura 4.8. Trasăm tangenta la graficul G_f în punctul $A(x_0, f(x_0))$. Avem $\Delta x = AB$, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \frac{BC}{AB}$ (a se vedea $\triangle ABC$ cu $m(\angle B) = 90^\circ$).

Atunci $BC = f'(x_0) \cdot AB$, sau $BC = f'(x_0) \Delta x = df(x_0)$.

Deci, interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții f într-un punct x_0 este următoarea: $df(x_0)$ reprezintă creșterea ordonatei funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, ce corespunde creșterii Δx a argumentului ei, iar $df(x_0)$ – creșterea ordonatei tangentei la graficul G_f în punctul $(x_0, f(x_0))$, care corespunde aceleiași creșteri Δx a argumentului funcției f (fig. 4.8).

Formulele (3) și (4) implică următoarea relație de aproximare:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0), \quad (6)$$

sau $BD \approx BC$.

Din relația (6) rezultă:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (7)$$

Pentru Δx suficient de mici avem $f(x_0 + \Delta x) \approx y$. Cu alte cuvinte, în vecinătatea punctului A , pe o porțiune suficient de mică a graficului funcției f , arcul de curbă este aproximat cu un segment al tangentei la graficul G_f în punctul A .

Formula (7) se aplică deseori la calculul aproximativ al valorii unei funcții într-un punct indicat.

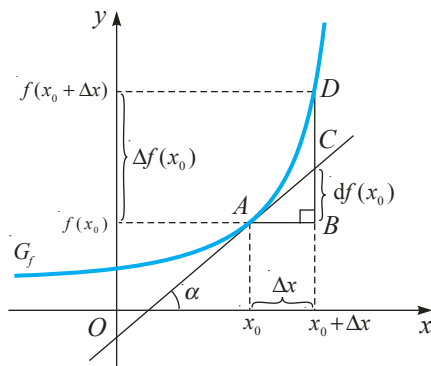


Fig. 4.8

Observații. 1. Aplicând formula (7), se pot deduce formulele:

$$1) \sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta x. \quad (8)$$

$$2) (1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \cdot \Delta x, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (9)$$

2. Formulele (7)–(9) pot fi aplicate doar pentru valori suficient de mici ale lui Δx .

Din definiția diferențialei unei funcții rezultă că tabloul derivatelor funcțiilor elementare se poate transcrie în tabloul diferențialelor funcțiilor respective:

$$d(c) = 0, \quad c \in \mathbb{R};$$

$$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}};$$

$$d(e^x) = e^x dx;$$

$$d(a^x) = a^x \ln a \, dx;$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x};$$

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2};$$

$$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a};$$

$$d(\sin x) = \cos x \, dx;$$

$$d(\cos x) = -\sin x \, dx;$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x};$$

$$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x};$$

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2};$$

$$d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

Regulilor de derivare (hartă noțională a modului 4) le corespund reguli similare de diferențiere.

Exemple

1. $d(e^x \cdot x^3) = e^x \cdot x^3 \cdot dx + 3x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 e^x (x+3) dx.$
2. $d(\sin 3x) = 3 \cos 3x \, dx.$

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^3 + 2x;$

b) $f(x) = \frac{x}{1-x};$

c) $f(x) = \sin(x+1);$

d) $f(x) = 2^{3x};$

e) $f(x) = \cos 2x.$

2. Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x \cdot \log_2 x;$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x};$

c) $f(x) = x \cdot \operatorname{ctg}(x+5) - \ln 5x;$

d) $f(x) = 3 \ln \frac{x}{3} + 5.$

3. Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}, \text{ în } x_0 = -2;$

b) $f(x) = \sin x - \cos x, \text{ în } x_0 = \frac{\pi}{3};$

c) $f(x) = \log_2(x^2 + 3), \text{ în } x_0 = 1;$

d) $f(x) = (x-1)^3 - \ln x, \text{ în } x_0 = 2.$

B₁ 4. Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt{x} + 5x^4 - x^{-7};$

b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x} - \ln(x^2 - 1) + 7;$

c) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt[5]{x^2} - x.$

5. Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = \sin 2x - \cos^3 x + 5$, în $x_0 = \frac{\pi}{6}$;
 - $f(x) = \arctg 3x + 5 \arccos x$, în $x_0 = 1$;
 - $f(x) = -\sqrt{5} \cdot 7^{x^2} + \arcsin \frac{x}{3}$, în $x_0 = 0$;
 - $f(x) = x^3 e^{2x}$, în $x_0 = 2$.
6.  **Lucrați în perechi!** Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$, și $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x-1)$. Să se calculeze diferențiala funcției:
- $f(g(x))$;
 - $g(f(x))$.
7. Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = \sin^2(x^4)$;
 - $f(x) = \arctg\left(\ln \frac{1}{x}\right)$;
 - $f(x) = 5^{\operatorname{ctg} \frac{2}{x}}$.
- C₁** 8. Să se calculeze diferențiala funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- $f(x) = x^{\sin x}$;
 - $f(x) = x^{\ln x}$;
 - $f(x) = (x-1)^{3x}$.
9.  **Investigați!** Se consideră funcția:
- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x-1|}$;
 - $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x+1| e^{-|x|}$.
- 1) Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției f .
 - 2) Să se calculeze diferențiala funcției f .

§6 Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

În continuare vom pune în evidență unele proprietăți generale ale funcțiilor derivabile. Teoremele ce urmează sunt **teoreme fundamentale ale analizei matematice**.

6.1. Teorema lui Fermat

Reamintim!

Punctele de maxim (minim) local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.

Teorema 21 (teorema lui Fermat¹). Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I și $x_0 \in I$. Dacă x_0 este un punct de extrem local al funcției f , atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstrație

Presupunem că x_0 este un punct de maxim local al funcției f . Atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 ($V(x_0) \subset I$), astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0)$. Pentru $x \in V(x_0)$, $x < x_0$, avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, iar pentru $x \in V(x_0)$, $x > x_0$, obținem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.



Pierre de Fermat

¹ Pierre de Fermat (1601–1665) – matematician francez.

Deoarece funcția f este derivabilă în x_0 , rezultă că $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$, unde

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Deci, $f'(x_0) \geq 0$ și $f'(x_0) \leq 0$, de unde rezultă că $f'(x_0) = 0$.

Teorema se demonstrează similar și în cazul în care x_0 este un punct de minim local al funcției f . Pentru acest caz teorema mai poate fi demonstrată substituind în demonstrația de mai sus f cu $-f$. ►

Interpretare geometrică. În condițiile teoremei lui Fermat, tangenta la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Ox (fig. 4.9).

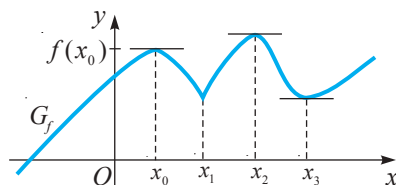


Fig. 4.9

Observație. Teorema lui Fermat exprimă doar *condiția necesară* pentru ca funcția derivabilă f să aibă în punctul x_0 extrem local. Din faptul că derivata funcției f se anulează în x_0 încă nu rezultă, în mod obligatoriu, că această funcție are în x_0 extrem local.

De exemplu, derivata funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, se anulează în $x_0 = 0$, însă $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local pentru funcția f (fig. 4.10).

Acest exemplu demonstrează că reciproca teoremei lui Fermat este falsă.

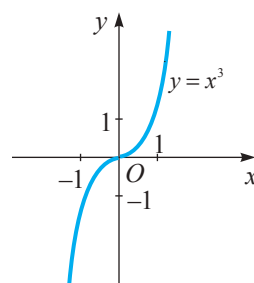


Fig. 4.10

6.2. Teorema lui Rolle

Următoarea teoremă, foarte utilă în aplicații, este o consecință a proprietăților funcțiilor continue și a teoremei lui Fermat.

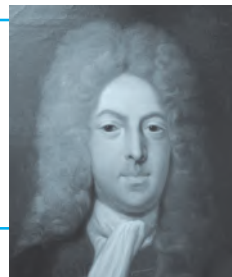
Teorema 22 (teorema lui Rolle¹). Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) este continuă pe $[a, b]$,
 - 2) este derivabilă pe (a, b) și
 - 3) $f(a) = f(b)$,
- atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstrație

Funcția f , fiind continuă pe $[a, b]$, conform teoremei II Weierstrass (modulul 3, secvența 2.1), este mărginită și își atinge marginile pe acest interval.

Fie $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, $m, M \in \mathbb{R}$. Sunt posibile cazurile: $m = M$; $m < M$.



Michel Rolle

¹ Michel Rolle (1652–1719) – matematician francez.

1) Dacă $m = M$, atunci funcția f este constantă pe $[a, b]$.

Prin urmare, $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a, b)$.

2) Dacă $m < M$, atunci f nu este o funcție constantă pe $[a, b]$. Din condiția $f(a) = f(b)$ rezultă că funcția f nu-și atinge cel puțin una dintre margini, m sau M , în extremitățile segmentului $[a, b]$. Adică, există un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = m$ sau $f(c) = M$. Cum c este un punct de extrem local, conform teoremei lui Fermat, $f'(c) = 0$. ►

Observație. Orice funcție cu proprietățile 1) și 2) se numește **funcție Rolle**.

Interpretare geometrică. Dacă segmentul determinat de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ este paralel cu axa Ox , atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât tangenta în punctul $(c, f(c))$ al graficului funcției derivabile f este paralelă cu axa Ox (fig. 4.11).

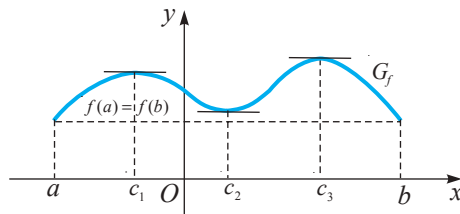


Fig. 4.11

Exemplu

Funcția $f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 2x + 1$, verifică următoarele condiții:

- 1) este continuă pe $[-1, 0]$,
- 2) este derivabilă pe $(-1, 0)$,
- 3) $f(-1) = f(0) = 1$.

Conform teoremei lui Rolle, există cel puțin un punct $c \in (-1, 0)$, astfel încât $f'(c) = 0$. Să determinăm acest punct c .

Avem $f'(x) = 6x^2 - 2 = 0$ cu $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \notin (-1, 0)$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, 0)$. Așadar, $c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Observații. 1. Punctul c din teorema lui Rolle nu întotdeauna este unic pentru funcția dată.

2. Dacă se renunță la cel puțin una dintre ipotezele teoremei lui Rolle, atunci concluzia teoremei este falsă.

Exercițiu. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 2, & \text{dacă } x = 0, \end{cases} \quad I = [0, 1];$
- b) $f(x) = 2x, \quad I = [0, 1];$
- c) $f(x) = |x|, \quad I = [-1, 1].$

Determinați care dintre condițiile teoremei lui Rolle nu se verifică și convingeți-vă că, în acest caz, concluzia teoremei lui Rolle este falsă.

Corolare ale teoremei lui Rolle

1. Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval se află cel puțin un zero al derivatei acestei funcții (fig. 4.12).

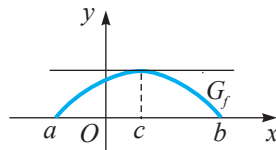


Fig. 4.12

2. Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval se află cel mult un zero al acestei funcții (fig. 4.13).

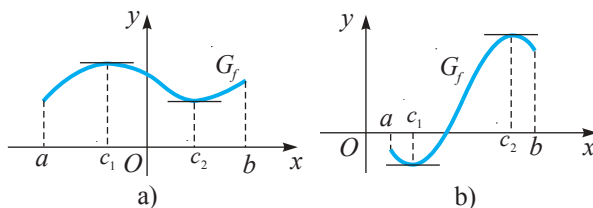
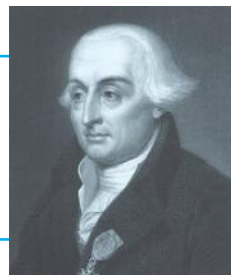


Fig. 4.13

6.3. Teorema lui Lagrange

Teorema 23 (teorema lui Lagrange¹). Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) , atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.



Joseph Louis Lagrange

Demonstrație

Considerăm funcția auxiliară $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - mx$, $m \in \mathbb{R}$. Funcția F este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) . Determinăm constanta $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $F(a) = F(b)$, adică $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Cum funcția F satisface condițiile teoremei lui Rolle, rezultă că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $F'(c) = 0$.

Din relațiile $F'(x) = f'(x) - m$ și $F'(c) = 0$ rezultă că $f'(c) = m$.

Prin urmare, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, sau $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ (1). ►

Interpretare geometrică. Graficul funcției f admite tangentă în orice punct $x \in (a, b)$. Dreapta care trece prin punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ are panta $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m_1$, iar tangenta la graficul funcției f în punctul $(c, f(c))$ are panta $f'(c) = m_2$. Cum $m_1 = m_2$, rezultă că aceste drepte sunt paralele.

Așadar, în condițiile teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct al graficului G_f în care tangenta este paralelă cu secanta AB (fig. 4.14).

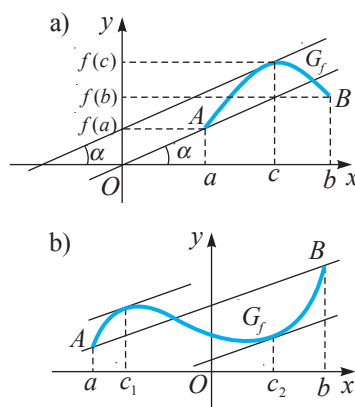


Fig. 4.14

Exercițiu rezolvat

☞ Să se aplice teorema lui Lagrange funcției $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 6 - 2x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{4}{x}, & x \in (1, 2], \end{cases} \quad \text{și să se determine efectiv } c.$$

¹ Joseph Louis Lagrange (1736–1813) – matematician și mecanic francez.

Rezolvare:

Funcția f este continuă și derivabilă pe fiecare dintre intervalele $[0, 1)$ și $(1, 2]$. Deoarece $f(1-0) = f(1) = f(1+0) = 4$, rezultă că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 1$ și deci continuă pe $[0, 2]$.

$$\text{Avem } f'(x) = \begin{cases} -4x, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ -\frac{4}{x^2}, & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

În baza definițiilor derivatelor laterale, $f'_s(1) = f'_d(1) = -4$. Rezultă că $f'(1) = -4$. Deci, funcția f este derivabilă pe $(0, 2)$. Atunci, conform teoremei lui Lagrange, există cel puțin un punct $c \in (0, 2)$, astfel încât $f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$, adică $f'(c) = -2$. Ținând cont de derivata funcției f pe intervalele indicate, obținem ecuația $-4c = -2$ pentru $c \in (0, 1)$ și ecuația $-\frac{4}{c^2} = -2$ pentru $c \in (1, 2)$, cu soluțiile $c_1 = 0,5$ și respectiv $c_2 = \sqrt{2}$. Așadar, am obținut două puncte: c_1 și c_2 .

Răspuns: $c_1 = 0,5$; $c_2 = \sqrt{2}$.

Observații. 1. Formula (1) se numește *formula lui Lagrange* sau *formula creșterilor finite*.

2. Ca și în cazul teoremei lui Rolle, punctul c nu întotdeauna este unic pentru funcția dată.

3. Teorema lui Lagrange este o generalizare a teoremei lui Rolle.

Într-adevăr, dacă în teorema lui Lagrange se verifică și condiția $f(a) = f(b)$, atunci din formula (1) rezultă că $f'(c) = 0$, adică obținem concluzia din teorema lui Rolle.

4. Corolarul referitor la monotonia funcției se va studia în modulul 5 (teorema 2, § 1, secvența 1.1).

Corolare ale teoremei lui Lagrange

1. Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci f este constantă pe I .

2. Dacă $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile pe intervalul I și $f' = g'$, atunci funcția $g - f$ este constantă pe I .

3. Fie f o funcție definită într-o vecinătate V a punctului x_0 , derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$ și continuă în x_0 . Dacă există $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci există $f'(x_0)$ și $f'(x_0) = \lambda$.

Observație. Corolarul 3 impune o condiție suficientă ca f să fie derivabilă în x_0 . Această condiție nu este însă și necesară.

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$ este continuă și derivabilă în $x_0 = 0$, dar $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ nu există.

6.4. Regulile lui l'Hospital

Unele limite de funcții pot fi calculate cu ajutorul derivatelor. Aplicarea următoarelor două teoreme, numite **regulile lui l'Hospital**¹, fac posibil calculul unor limite de forma $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, în cazurile în care $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ sau dacă aceste limite sunt infinite.



Guillaume de l'Hospital

6.4.1. Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{0}{0}$

Teorema 24. Fie I un interval ($I \subseteq \mathbb{R}$), $x_0 \in I$ și funcțiile $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,
- 2) funcțiile f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$,
- 3) $g'(x) \neq 0, \forall x \in V(x_0) \cap I$,
- 4) există limita (finită sau infinită) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

6.4.2. Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 25. Fie I un interval, $x_0 \in I$ și funcțiile $f, g: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$,
- 2) funcțiile f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$,
- 3) $g'(x) \neq 0, \forall x \in V(x_0) \cap I$,
- 4) există limita (finită sau infinită) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observații. 1. Teoremele 24 și 25 sunt adevărate și pentru limite laterale în punctul indicat.

2. Regulile lui l'Hospital sunt adevărate și în cazul în care $x \rightarrow \infty$.

3. Teoremele 24 și 25 reprezintă *condiții suficiente* pentru rezolvarea cazurilor exceptate $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

4. Dacă nedeterminarea $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ este prezentă atât în $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, cât și în $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

și dacă funcțiile f, g, f', g' , precum și ambele aceste limite verifică condițiile regulii

respective a lui l'Hospital, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. În acest caz se spune că

s-a aplicat succesiv de două ori regula lui l'Hospital.

¹ Guillaume de l'Hospital (1661–1704) – matematician francez.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se calculeze: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$; 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x}$.

Rezolvare:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Observație. În unele cazuri apare necesitatea de a aplica succesiv regulile lui l'Hospital de trei sau de mai multe ori.

6.4.3. Cazurile exceptate $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0

Cazurile exceptate $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 pot fi reduse la cazul exceptat $\frac{0}{0}$ sau la cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$ prin metodele propuse în modulul 2.

Exerciții rezolvate

☞ 1. Să se calculeze:

$$a) \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \cdot \ln x); \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right); \quad c) \lim_{x \rightarrow +0} x^x; \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2x}.$$

Rezolvare:

a) Suntem în cazul exceptat $0 \cdot \infty$. Avem $x^2 \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$. Atunci $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$,

și $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Funcțiile f și g sunt derivabile:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \text{ și } g'(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0, \forall x \in (0, +\infty).$$

$$\text{Așadar, } \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

$$\text{Răspuns: } \lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \cdot \ln x) = 0.$$

b) Avem cazul exceptat $\infty - \infty$. Cum $\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x}$, obținem cazul exceptat $\frac{0}{0}$.

Deci,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x)'}{(x \operatorname{tg} x)'} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right)'}{\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x \operatorname{tg} x + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x \cdot \sin x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\frac{1}{2} \sin 2x + x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - 1)'}{\left(\frac{1}{2} \sin 2x + x \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{\cos 2x + 1} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Răspuns: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Observație. În exemplul b) am aplicat regula lui l'Hospital succesiv de două ori, deoarece, aplicând-o prima dată, am obținut iarăși cazul exceptat $\frac{0}{0}$.

c) Avem cazul exceptat 0^0 . Fie $f(x) = x^x$. Atunci $\ln f(x) = x \cdot \ln x$.

Deci, $f(x) = e^{x \ln x}$.

Deoarece $\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, obținem:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x)} = e^0 = 1.$$

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$.

d) Suntem în cazul exceptat 1^∞ .

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2x}$, atunci $\ln f(x) = 2x \cdot \ln \frac{x-1}{x+1}$.

Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{2x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^2-1}}{-\frac{1}{2x^2}} = -4$.

Răspuns: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2x} = e^{-4}$.

Exercițiul d) poate fi rezolvat și cu ajutorul formulei $u^v = e^{v \ln u}$.

Observație. Regulile lui l'Hospital se folosesc și la calculul unor limite de șiruri.

2. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$.

Rezolvare:

Considerăm funcția $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, și calculăm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Suntem în cazul exceptat ∞^0 .

Logaritmand $f(x)$, avem cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x, \text{ iar } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Prin urmare, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Atunci $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$.

Răspuns: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Rezolvare:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

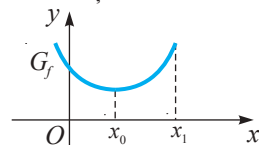
Răspuns: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$.

Observație. În calculul limitelor de funcții se recomandă combinarea metodelor elementare cu regulile lui l'Hospital.

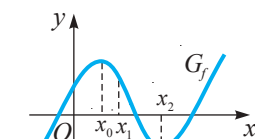
Exerciții propuse

Profilul real

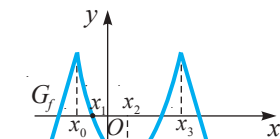
- A₁ 1.**  **Lucrați în perechi!** Să se determine în care dintre punctele indicate sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția f definită grafic:



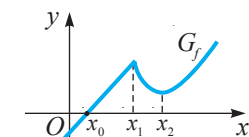
a)



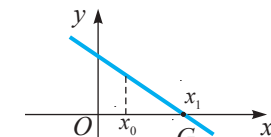
b)



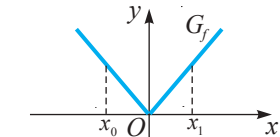
c)



d)



e)



f)

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$;

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

1) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$ și să se determine dacă sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat în punctul x_0 , unde x_0 este soluția acestei ecuații.

2) Să se reprezinte graficul funcției f și să se interpreteze geometric teorema lui Fermat în punctul x_0 .

3. Să se determine dacă în punctul $x_0 = 1$ sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: a) $f(x) = (x-1)^2$; b) $f(x) = (x-1)^3$.

4. Să se traseze graficul unei funcții, astfel încât în punctele $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ să se verifice condițiile teoremei lui Fermat.

- B₁ 5.**  **Investigați!** Să se dea exemple de funcții pentru care un număr finit de puncte ale intervalului respectiv sunt puncte de extrem local, dar în aceste puncte nu se verifică teorema lui Fermat.

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$.

a) Să se arate că funcția f satisface condițiile teoremei lui Rolle pe intervalele închise $-1 \leq x \leq 0$ și $0 \leq x \leq 1$.

b) Să se determine valorile corespunzătoare ale lui c .

7.  **Investigați!** Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle funcției f și, în caz afirmativ, să se determine efectiv punctul c :

a) $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(x-3)$; b) $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|$;

c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$; d) $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$.

8. Fie funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ x^2 + bx + d, & \text{dacă } x \in [0, 1] \end{cases}$

a) Să se determine parametrii reali a , b , d , astfel încât funcția f să satisfacă condițiile teoremei lui Rolle pe $[-1, 1]$.

b) Să se aplice teorema lui Rolle funcției f cu parametrii a, b, d determinați în a) și să se afle efectiv punctul c .

9.  **Lucrați în perechi!** Fie funcția:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)(x+2)(x+3);$

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 16).$

Să se arate că derivata funcției are numai zerouri reale.

10. Să se demonstreze că ecuația $2^x(1+x\ln 2) - 20x^9 = 0$ are cel puțin o soluție pe $(0, 1)$.

11. Fie $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sin x - \cos x - 1$. Să se arate că există cel puțin un punct $c \in (0, 2\pi)$, astfel încât $f''(c) = 0$.

12. Să se aplice teorema lui Lagrange funcției f și să se determine efectiv punctul c :

a) $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - x + 2;$

b) $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\ln x;$

c) $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{dacă } x \in [0, 2] \\ 5x - 2, & \text{dacă } x \in (2, 3]; \end{cases}$

d) $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + e^x.$

13. Să se dea exemplu de o funcție $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ ce satisface condițiile teoremei lui Lagrange, pentru care punctul intermediar $c \in (0, 8)$ nu este unic.

14. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 4\ln x + 3x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$ Să se afle $f'(1)$.

15.  **Investigați!** Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + |x|$, poate avea un extrem într-un punct x_0 fără a avea derivată în punctul x_0 .

16. Să se studieze derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \ln x + x, & \text{dacă } x > 1, \end{cases}$ în punctul $x_0 = 1$, utilizând corolarul 3 al teoremei lui Lagrange.

17. Aplicând regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x}{x^3 - 2x^2 + x};$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{3x^2 + 3x};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{2x^2 - x};$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^3 - x};$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}, n \in \mathbb{N}^*;$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*;$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)^{\frac{1}{2x}};$

h) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin 2x}.$

18. Să se calculeze limita:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\lg x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\lg x)^{\sin 2x};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}, x > 0.$

19. Aplicând regula respectivă a lui l'Hospital, să se calculeze limita șirului:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1};$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 n}{50\sqrt{n}};$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{1,01^n}.$

C 20. Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$. Aplicând teorema lui Lagrange, să se demonstreze că:

a) șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ este divergent.

b) șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

21. Să se demonstreze, utilizând corolarul 1 al teoremei lui Lagrange, că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real

În exercițiile 1 și 2 determinați litera corespunzătoare variantei corecte.

- A₁** 1. Derivata funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$, este
- A** $f'(x) = 2x^2 - 2x$. **B** $f'(x) = 6x^2 - 2x$.
C $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$. **D** $f'(x) = 3x^2 - 2x$.
2. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x-2}$. Atunci
- A** $f'(1) = 0$. **B** $f'(1) = 2$.
C $f'(1) = \frac{1}{2}$. **D** $f'(1)$ nu există.
3.  **Investigați!** Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.
- a) Să se determine valoarea de adevăr a propoziției „ $D_f \subseteq D_g$ ”.
 b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul G_f în punctul $x_0 = 1$.
 c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f'(x) < g'(x)$.
 d) Să se traseze în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor f' și g' .
 e) Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f' și g' .
4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x) = 0$, unde f este funcția definită prin formula:
- a) $f(x) = x^3 - 2x^2$; b) $f(x) = 2x \ln x$; c) $f(x) = (x-1)e^x$.
5.  **Lucrați în perechi!** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f'(x) \geq 0$, unde f este funcția definită prin formula $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
6. Dintr-un punct pornesc concomitent două mobile: primul cu viteza inițială de 8 m/s și accelerația de 4 m/s², iar al doilea – într-o mișcare uniformă cu viteza de 16 m/s.
- a) Să se afle momentul de timp în care mobilele se vor întâlni, dacă se știe că ecuația mișcării uniform accelerate este $x(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, iar ecuația mișcării uniforme este $x(t) = vt$.
 b) Să se determine momentul de timp t în care viteza primului mobil va fi de două ori mai mare decât viteza celui de al doilea.
- B₁** 7. Să se calculeze diferențiala funcției f definită prin formula:
- a) $f(x) = \cos(\sin x)$; b) $f(x) = \sin(\cos x)$; c) $f(x) = \ln(\ln x)$.
8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x) = 0$, unde f este funcția definită prin formula:
- a) $f(x) = \sin x + \cos x$; b) $f(x) = \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x$; c) $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}$.
9. a) Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în punctele indicate:
- 1) $f(x) = x^2 + x \cdot |x|$, $x_0 = 0$;
 2) $f(x) = x + |x - 3|$, $x_0 = 3$;
 3) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.
- b) Să se traseze graficul fiecăreia dintre funcțiile f .

10.  **Lucrați în perechi!** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{|x-3|}$.
- Să se demonstreze că funcția f este continuă în punctul $x_0 = 3$, dar nu este derivabilă în acest punct.
 - Să se traseze graficul funcției f .
11. Fie $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomialului P sunt reale și distincte, atunci P' are aceeași proprietate.
12.  **Investigați!** Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$.
13. Să se demonstreze că deși $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x}$ există, nu pot fi aplicate direct regulile lui l'Hospital.
14. Să se verifice dacă formula lui Lagrange este adevărată pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$, pe intervalul $[0, 1]$ și să se determine efectiv c .
15. Să se verifice justetea teoremei lui Rolle pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pe intervalul indicat:
- $f(x) = \cos^2 x$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;
 - $f(x) = \sin^2 x$, $[0, \pi]$;
 - $f(x) = (x-3)(x-4)(x-5)$, $[3, 5]$.
16. Utilizând regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{\ln(1+e^{3x})}$.
- C** 17. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{1+x^2}}$. Să se demonstreze că funcția f verifică relația $(1+x^2)^2 \cdot f''(x) + 2x(1+x^2) \cdot f'(x) + f(x) = 0$.
18. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x - 2^x = 8^x - 6^x$, utilizând teorema lui Lagrange.
19. Un mobil se deplasează rectiliniu conform legii $s(t) = e^{mt} \cos 2t$.
- Să se determine constanta m , știind că $s''(t) + 2s'(t) + 5s(t) = 0$.
 - Să se afle apoi viteza și accelerația mobilului în momentele de timp $t = 0$ și $t = \frac{\pi}{4}$.
20. (BAC, 2019) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a^2-1}{3}x^3 + \frac{a+1}{2}x^2 + 2x - 1$. Determinați valorile reale ale lui a , astfel încât graficul funcției f conține un singur punct în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox .

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilul real

1. Fie funcțiile $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 6x + 1$.
 - a) Determinați valoarea de adevăr a propoziției: „ $D_{f'} \subset D_{g'}$ ”. A / F ②
 - b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $f'(x) = g'(x)$. ⑤
 - c) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = \pi$. ④
 - d) Calculați diferențiala funcției $g(f(x))$. ④
2. Utilizând regulile lui l'Hospital, calculați limita $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. ⑥
3. Fie funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + d, & \text{dacă } x \in [-1, 0] \\ 1 + \ln(x^2 + 1), & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$
 - a) Aflați $a, b, d \in \mathbb{R}$, astfel încât teorema lui Rolle să poată fi aplicată funcției f . ⑥
 - b) Aplicați teorema lui Rolle funcției f , cu parametrii a, b, d determinați în a). ④
4. Un mobil se deplasează rectiliniu conform legii $s(t) = 3t^2 + 9\ln t + 18$ (distanța s este exprimată în centimetri, iar timpul t – în secunde). Aflați momentul de timp t în care accelerația este de 2 cm/s^2 . ⑤

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0

Derivata și diferențiala funcției

Derivate laterale

$$f'_s(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Regulele de calcul al derivatelor

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
- $(f - g)' = f' - g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- Derivata funcției compuse:
 $(g \circ f)'(x) = (g'(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- Derivata funcției inverse:
 $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$
- Derivate de ordin superior:
 $f'' = (f')'; f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Unele aplicații ale derivatelor

- Ecuția tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă x_0 :
 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Aplicații la calculele aproximative
- Determinarea coeficienților binomiali
- Calculul unor limite (regula lui l'Hospital)
- Studiul funcțiilor

Derivata funcției

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ sau } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

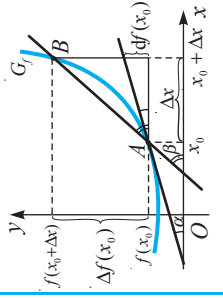
Diferențiala funcției

$$df(x) = f'(x)dx$$

Tabelul derivatelor și diferențialelor funcțiilor elementare

f	D_f	f'	$D_{f'}$	df
1. c (constantă)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	0
2. $x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1} dx$
3. $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1} dx$
4. $\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2} dx$
5. $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2n \cdot \sqrt[n]{x^{2n-1}}}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{2n \cdot \sqrt[n]{x^{2n-1}}} dx$
6. $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{(2n+1) \cdot \sqrt[n]{x^{2n+1}}}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{(2n+1) \cdot \sqrt[n]{x^{2n+1}}} dx$
7. $\sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx$
8. $a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a dx$
9. e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^x dx$
10. $\ln x$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x} dx$
11. $\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x \ln a} dx$
12. $\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x dx$
13. $\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x dx$
14. $\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{2k+1\} \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{2k+1\} \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\cos^2 x} dx$
15. $\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x} dx$
16. $\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
17. $\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
18. $\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1} dx$
19. $\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1} dx$

Interpretarea geometrică a derivatei și diferențialei funcției



Regulele de calcul al diferențialelor

- $d(f + g) = df + dg$
- $d(c \cdot f) = c \cdot df$
- $d(f - g) = df - dg$
- $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$
- $df(g) = f'(g)dg$

Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

- Teorema lui Fermat
- Teorema lui Rolle
- Teorema lui Lagrange

Obiective

- ⇒ *aplicarea derivatei la determinarea intervalelor de monotonie și a extremelor funcției;
- ⇒ *recunoașterea și utilizarea în diverse contexte a noțiunilor *punct critic*, *punct de extrem*, *extremele funcției*;
- ⇒ *determinarea cu ajutorul derivatei a punctelor de inflexiune, a intervalelor de concavitate și de convexitate ale graficului unei funcții;
- ⇒ *utilizarea metodelor ce țin de aplicațiile derivatei ca metode noi de studiere a funcției, de rezolvare a problemelor teoretice și practice;
- ⇒ *aplicarea derivatelor la rezolvarea unor probleme de maxim și minim din geometrie, fizică, economie etc.;
- ⇒ *utilizarea derivatelor pentru a identifica și explica procese, fenomene din diverse domenii.

În acest modul vom aplica derivatele de ordinul întâi și derivatele de ordinul doi la studiul variației funcțiilor, vom rezolva diverse probleme de geometrie, fizică și din alte domenii, probleme care, în majoritatea cazurilor, nu pot fi rezolvate folosind metode elementare.

§1 Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

1.1. Intervalele de monotonie ale unei funcții

În studiul variației unei funcții este important să cunoaștem în ce condiții funcția este constantă sau monotonă pe un interval dat. Am stabilit deja că derivata unei funcții constante pe un interval dat este egală cu zero. Va fi utilă și reciproca acestei afirmații.

Teorema 1. Fie $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) o funcție derivabilă. Dacă derivata funcției f este egală cu zero pe un interval $I \subseteq E$, atunci funcția f este constantă pe acest interval.

Demonstrație

Fie $f'(x) = 0, \forall x \in I$. Fixăm pe intervalul I un punct x_0 și fie punctul $x \in I, x \neq x_0$. Pe intervalul $[x_0, x]$ (sau pe $[x, x_0]$) funcția f satisface condițiile teoremei lui Lagrange (modulul 4, § 6, secvența 6.3). Conform acestei teoreme, există un punct c situat între x_0 și x , astfel încât $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Deoarece $f'(c) = 0$, din ipoteză, rezultă că $f(x) = f(x_0)$. Prin urmare, în orice punct $x \in I$ funcția f ia valoarea $f(x_0)$, adică funcția f este constantă pe I . ►

Corolar. Dacă f și g sunt funcții derivabile și $f' = g'$ pe un interval I , atunci funcțiile f și g diferă pe I printr-o constantă: $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in I$, $C \in \mathbb{R}$.

Demonstrație

Considerăm funcția $\varphi = f - g$. Atunci $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, $\forall x \in I$. Astfel, funcția φ este constantă pe I și, prin urmare, $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in I$, $C \in \mathbb{R}$. ►

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine intervalele pe care funcțiile f și g diferă printr-o constantă și să se afle această constantă:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x; \quad g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

Rezolvare:

Pe fiecare dintre intervalele $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$ și $I_3 = (1, +\infty)$, funcțiile f și g au derivatele egale: $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Așadar, pe fiecare dintre aceste intervale, funcțiile date diferă printr-o constantă: $f(x) - g(x) = C_1$, $\forall x \in I_1$; $f(x) - g(x) = C_2$, $\forall x \in I_2$; $f(x) - g(x) = C_3$, $\forall x \in I_3$. Pentru intervalul I_2 obținem $C_2 = 0$ (ne convingem luând $x = 0$), iar pentru intervalele I_1 și I_3 avem $C_1 = -\frac{\pi}{2}$ și respectiv $C_3 = \frac{\pi}{2}$, dacă, de exemplu, x tinde la $-\infty$ și respectiv la $+\infty$.

$$\text{Astfel, am obținut: } \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} - \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in (-\infty, -1); \quad \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}, \\ \forall x \in (-1, 1); \quad \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} + \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in (1, +\infty).$$

Relațiile obținute pot fi demonstrate și prin metode elementare, fără aplicarea derivatei.

Observație. În baza exercițiului rezolvat, tragem concluzia că din faptul că funcția f este definită pe reuniunea a două (sau mai multe) intervale disjuncte, I_1, I_2 , $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, și $f'(x) = 0$, $\forall x \in I_1 \cup I_2$, încă nu rezultă că ea este constantă pe mulțimea $I_1 \cup I_2$.

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ are derivata nulă în fiecare punct al mulțimii $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, însă ea nu este constantă pe A .

Vom stabili acum un criteriu important și eficient de determinare a intervalelor de monotonie ale unei funcții derivabile.

Teorema 2. Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I . Funcția f este crescătoare (descrescătoare) pe I dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.

Demonstrație

Necesitatea. Presupunem că funcția f este crescătoare pe I . Atunci $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, $\forall x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Fixând $x_0 \in I$ și trecând în acest raport la limită când $x \rightarrow x_0$, obținem că $f'(x_0) \geq 0$, $\forall x_0 \in I$.

Raționament similar se face și în cazul în care f este o funcție descrescătoare pe intervalul I .

Suficiența. Să considerăm punctele arbitrare $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, și fie $f'(x) \geq 0$ pe I . Aplicând funcției f teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$, obținem că $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, unde $c \in (x_1, x_2)$ și $f'(c) \geq 0$. Cum $x_2 - x_1 > 0$, rezultă că $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, adică $f(x_2) \geq f(x_1)$. Deci, funcția f este crescătoare pe I .

Analog, dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, obținem că funcția f este descrescătoare pe I . ►

Observații. 1. Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este strict crescătoare pe I .

2. Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este strict descrescătoare pe I .

3. Din faptul că funcția f este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe I nu rezultă că f' nu se anulează în niciun punct din I . De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, însă $f'(0) = 0$.

Vom arăta că dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe I cu $f'(x) > 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, atunci ea este strict crescătoare pe I (dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, atunci ea este strict descrescătoare pe I). Într-adevăr, din observația 1 rezultă că funcția f este strict crescătoare pe cele două intervale determinate de punctul x_0 . Mai rămâne să comparăm valoarea funcției f în punctul x_0 cu celelalte valori ale ei. Conform formulei lui Lagrange avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_1) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$ și $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_2) > 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$. Rezultă că $f(x) < f(x_0)$ pentru $x < x_0$, respectiv $f(x_0) < f(x)$ pentru $x_0 < x$. În mod similar se arată că dacă funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe I cu $f'(x) < 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, atunci ea este strict descrescătoare.

Concluzie. O funcție derivabilă este strict monotonă pe intervalele pe care derivata sa își păstrează semnul. Prin urmare, pentru a stabili intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile, determinăm intervalele pe care derivata sa își păstrează semnul.

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deoarece $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$, este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, întrucât $f'(x) = 2x - 1 < 0$, $\forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ și $f'(x) > 0$, $\forall x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, deoarece $f'(x) = \cos x - 1 = 0$ în punctele $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, iar în celelalte puncte $f'(x) < 0$.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^2, & \text{dacă } -2 < x < -1 \\ 0, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 1 \\ (1-x)^2, & \text{dacă } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Rezolvare:

Ne convingem că funcția f este derivabilă pe $(-2, 2)$ și

$$f'(x) = \begin{cases} 2(1+x), & \text{dacă } -2 < x < -1 \\ 0, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 1 \\ -2(1-x), & \text{dacă } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Deoarece $f'(x) < 0$ pe intervalul $(-2, -1)$ și $f'(x) > 0$ pe intervalul $(1, 2)$, rezultă că pe primul interval f este strict descrescătoare, iar pe al doilea este strict crescătoare. Pe intervalul $[-1, 1]$ funcția f este constantă, fiindcă $f'(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$.

1.2. Puncte de extrem ale unei funcții

Reamintim!

Definiții. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$).

- Punctul $x_0 \in I$ se numește **punct de maxim local** al funcției f dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$. În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numește **maxim local** al funcției f în punctul x_0 .
- Punctul $x_0 \in I$ se numește **punct de minim local** al funcției f dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 , astfel încât $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$. În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numește **minim local** al funcției f în punctul x_0 .
- Punctele de maxim local și de minim local ale funcției f se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.
- Valorile funcției f în punctele ei de extrem local se numesc **extremele locale** ale acestei funcții.

Definiții. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$).

- Punctul $x_0 \in I$ se numește **punct de maxim global** al funcției f pe I dacă $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$, iar valoarea $f(x_0)$ se numește **maximul global** al funcției f pe I .
- Punctul $x_0 \in I$ se numește **punct de minim global** al funcției f pe I dacă $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in I$, iar valoarea $f(x_0)$ se numește **minimul global** al funcției f pe I .
- Punctele de maxim global și de minim global ale unei funcții se numesc **puncte de extrem global** ale acestei funcții.
- Valorile funcției f în punctele ei de extrem global se numesc **extremele globale** ale acestei funcții.

Observații. 1. Un punct de maxim (minim) local nu este în mod necesar un punct de maxim (minim) global. Un punct de maxim (minim) global este totodată și un punct de maxim (minim) local.

2. Este posibil ca un minim local al unei funcții să fie mai mare decât un maxim local al aceleiași funcții.

De exemplu, funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (fig. 5.1) are în punctul x_1 un minim local mai mare decât maximum local din punctul x_4 .

3. Dacă funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul $[a, b]$, atunci, conform teoremei lui Weierstrass, funcția f își atinge pe acest interval marginile $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ și $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, care sunt extremele globale ale funcției f pe intervalul $[a, b]$.

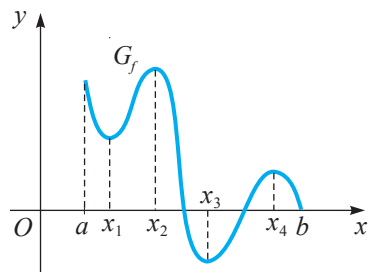


Fig. 5.1

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul deschis I . Din teorema lui Fermat rezultă că dacă $x_0 \in I$ este un punct de extrem local al funcției f , atunci $f'(x_0) = 0$. Astfel, teorema lui Fermat pune în evidență faptul că *derivata unei funcții se anulează în orice punct de extrem local al intervalului deschis I .*

Concluzii. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I și $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in I$.

1. Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este punct de maxim local al funcției f . Se notează: $\nearrow f(x_0) \searrow$. Semnul $\nearrow (\searrow)$ semnifică faptul că funcția este monoton crescătoare (descrescătoare) pe intervalul respectiv.
2. Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este punct de minim local al funcției f . Se notează: $\searrow f(x_0) \nearrow$.
3. Dacă derivata funcției f are același semn la stânga și la dreapta lui x_0 , atunci x_0 nu este punct de extrem local al acestei funcții.

Definiție. Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I . Punctele din intervalul I în care f' ia valoarea zero se numesc **puncte critice** (sau **staționare**) ale funcției f .

Observație. Concluziile 1–3 rămân adevărate și în cazul în care funcția f , fiind continuă în punctul x_0 , nu este derivabilă în x_0 . Astfel de puncte de asemenea se numesc **puncte critice (staționare)** ale funcției f .

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$, însă 0 este punct de minim local al acestei funcții.

Într-adevăr, $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ 1, & \text{dacă } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ și în punctul $x_0 = 0$ derivata își schimbă semnul din „-” în „+”.

Intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale unei funcții derivabile pe un interval deschis sau pe o reuniune de intervale deschise pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

- ① Se calculează f' .
- ② Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$; soluțiile acestei ecuații (zerourile funcției f' , precum și punctele în care f nu este derivabilă) sunt eventualele puncte de extrem local ale funcției f .
- ③ Se determină semnul funcției f' pe intervalele pe care ea nu se anulează.
- ④ Se stabilesc intervalele pe care funcția f' își păstrează semnul, acestea fiind intervalele de monotonie ale funcției f .
- ⑤ Se determină punctele de extrem local și extremele locale ale funcției f .

Exerciții rezolvate

🔗 1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 9x^2$.

Rezolvare:

$f'(x) = 3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$. Punctele critice ale funcției f sunt -6 și 0 .

Constatăm că:

- $f'(x) > 0$ pe intervalele $(-\infty, -6)$, $(0, +\infty)$, prin urmare, în baza observației 1 (secvența 1.1), funcția f este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -6]$, $[0, +\infty)$;
- $f'(x) < 0$ pe intervalul $(-6, 0)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[-6, 0]$.

Rezultatele acestui studiu pot fi trecute în așa-numitul **tablou (tabel) de variație al funcției**. Pe *linia întâi* a acestui tablou se indică domeniul de definiție al funcției și punctele în care derivata ei se anulează sau nu există. Pe *linia a doua* se scriu semnele funcției f' pe intervalele unde ea nu se anulează. Pe *ultima linie* se indică creșterea ($\nearrow$), descreșterea ($\searrow$) funcției, precum și extremele ei locale.

Obținem tabloul de variație al funcției f :

Așadar, -6 este punct de maxim local al funcției f și $f(-6) = 108$ este maximul ei local, iar 0 este punct de minim local al funcției f și $f(0) = 0$ este minimul ei local.

x	$-\infty$	-6	0	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	108	$\searrow$	0	$\nearrow$

🔗 2. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x < -\frac{1}{2} \\ \arcsin x + \arccos x, & \text{dacă } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rezolvare:

Deoarece $f\left(-\frac{1}{2} - 0\right) = f\left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{2}$ și $f\left(\frac{1}{2} - 0\right) = f\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{2}$, rezultă că

funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. Calculăm derivata:
$$f'(x) = \begin{cases} 2\left(x + \frac{1}{2}\right), & \text{dacă } x < -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{dacă } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{dacă } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Prin urmare, $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și deci funcția este descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Mai putem preciza că f este strict descrescătoare pe intervalele $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ și $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, iar pe intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ este și constantă.

❖ **3.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$. Să se stabilească intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale funcției f .

Rezolvare:

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Derivata funcției f nu se anulează pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$. Pe primul interval $f'(x) < 0$, iar pe al doilea $f'(x) > 0$. Deci, pe $(-\infty, 0]$ funcția f este strict descrescătoare, iar pe $[0, +\infty)$ – strict crescătoare. Punctul $x_0 = 0$ este punct de minim local al funcției f și $f(0) = e^0 = 1$ este minimul ei local.

Tabloul de variație al funcției f este:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	1	$\nearrow$

Observație. Cunoscând tabloul de variație al unei funcții, pot fi stabilite inegalități de tipul $f_1(x) \geq f_2(x)$, $x \in E$. Pentru aceasta, studiem variația și semnul funcției diferență $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Exercițiu rezolvat

❖ Să se arate că pentru orice $x > -1$ este adevărată inegalitatea $\ln(1+x) \leq x$.

Rezolvare:

Considerăm funcția f definită prin diferența expresiilor din cei doi membri:

$f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x$. Studiem variația acestei funcții cu ajutorul derivatei. Avem $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$.

Tabloul de variație al funcției f este:

x	-1	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$

Deoarece maximum funcției este 0, rezultă că funcția este negativă pe $(-1, +\infty)$, adică $\ln(1+x) - x \leq 0$.

Așadar, $\ln(1+x) \leq x$ și egalitatea are loc numai pentru $x = 0$.

1.3. Determinarea extremelor globale

Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe (a, b) și continuă pe $[a, b]$. În baza teoremei lui Weierstrass, funcția f își atinge marginile sale pe $[a, b]$, adică există punctele $x_1, x_2 \in [a, b]$, astfel încât $f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = m$, $f(x_2) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = M$. Dacă punctul x_1 (x_2) este situat în interiorul intervalului $[a, b]$, atunci în acest punct, conform teoremei lui Fermat, funcția f are un minim (maxim) local, deci $f'(x_1) = 0$ ($f'(x_2) = 0$). Însă marginile m și M pot fi atinse de funcția f și la extremitățile intervalului $[a, b]$.

De exemplu, funcția $f: \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, își atinge cea mai mare valoare a sa, $M = 1$, în punctul 0.

Extremele globale ale unei funcții continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și derivabile pe (a, b) pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

- ① Se află valorile funcției f la capetele intervalului $[a, b]$, $f(a)$ și $f(b)$.
- ② Se află punctele critice ale funcției f , adică se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$.
- ③ Se calculează valorile funcției f în punctele critice deja determinate și se compară cu valorile acestora la capetele intervalului: cea mai mică (mare) dintre aceste valori va fi minimul (maximul) global al funcției f pe $[a, b]$.

Exercițiu rezolvat

☛ Să se determine, pe intervalul indicat, extremele locale și extremele globale ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = x^3 + 2x - 10$, $I = [-1, 5]$; b) $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $I = [-3, 10]$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, $\forall x \in [-1, 5]$. Astfel, funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[-1, 5]$. În acest caz, $m = f(-1) = -13$, $M = f(5) = 5^3 + 2 \cdot 5 - 10 = 125$.

b) $f'(x) = 2x - 4$, $\forall x \in [-3, 10]$. Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ și aflăm punctele critice ale funcției f : $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. În punctul 2, funcția f are un minim local și $f(2) = 2$.

Deci, $m = \min[f(-3), f(2), f(10)] = \min[27, 2, 66] = 2$,

$M = \max[f(-3), f(2), f(10)] = \max[27, 2, 66] = 66$ sunt extremele globale ale funcției f .

Observație. Dacă funcția derivabilă f este definită pe intervalul $I = (a, b)$, finit sau infinit, atunci în algoritmul anterior valorile $f(a)$ și $f(b)$ se vor înlocui cu $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ și respectiv $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$. Se calculează marginile $m = \inf_{x \in I} f(x)$ și $M = \sup_{x \in I} f(x)$ care, în general, nu sunt atinse de funcția f .

Exercițiu rezolvat

☛ Să se determine marginile funcției:

- a) $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$; b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = e^x - 1 < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Prin urmare, $m = \inf_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = 1$, $M = \sup_{x \in (-\infty, 0)} f(x) = +\infty$ și aceste valori nu sunt atinse de funcția f .

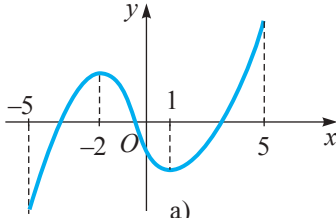
b) $f'(x) = \frac{3-x^2-2x}{(x^2+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 1$.

$f(-3) = -\frac{1}{6}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

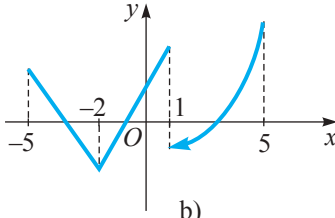
Deci, $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min\left\{-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{6}$, $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max\left\{-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ și aceste valori sunt atinse de funcția f .

Exerciții propuse

Profilul real

- A₁** 1. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$; b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$; c) $f(x) = (x^3 - 10)(x + 5)^2$;
d) $f(x) = x^3 - 6x$; e) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$; f) $f(x) = 2x^3 + 2x - 5$.
2.  **Lucrați în perechi!** Să se determine, pe intervalul indicat, extremele globale ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$, $I = [-1, 2]$; b) $f(x) = x^3 - x$, $I = [0, 5]$.
- B₁** 3. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și să se completeze tabloul de variație al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$; b) $f(x) = x^2 \ln x$; c) $f(x) = e^{\frac{1}{(x-3)}}$;
d) $f(x) = \arctg x - \ln x$; e) $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$; f) $f(x) = (x + 1)\sqrt{x^2 - 1}$.
4.  **Investigați!** Pentru care valori ale parametrului real a funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$:
- a) $f(x) = ax - \ln(1 + x^2)$; b) $f(x) = \arctg ax + x$; c) $f(x) = ax - \sin x$?
5. (BAC, 2011) Determinați valorile reale ale parametrului a pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}(a^2 - 1)x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 1$, este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
6. Aplicând derivata, să se arate că funcțiile f, g diferă printr-o constantă și să se determine constanta respectivă:
- a) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = 1 + 2 \sin x \cos x$;
b) $f, g: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$, $g(x) = \arctg \frac{x+1}{1-x}$;
c) $f, g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = -\arccos x$.
7. Să se scrie intervalele de monotonie ale funcției $f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ reprezentate grafic.
- 

a)



b)
8. Să se determine, pe intervalul indicat, extremele locale și extremele globale ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $I = [-1, 2]$;
b) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$, $I = [0, \pi]$; c) $f(x) = x - 2 \ln x$, $I = (0, e]$.
9. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = \frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$; b) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; c) $f(x) = x - 2 \arctg x$;
d) $f(x) = (x-1)e^{3x}$; e) $f(x) = x^4 e^{-x^2}$; f) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$;
g) $f(x) = |x-1| \sqrt[3]{x+2}$; h) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x \ln x, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$ i) $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

C₁ 10.  **Lucrați în perechi!** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

a) Să se calculeze f' pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

b) Să se studieze monotonia funcției f .

c) Să se compare numerele $\alpha = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{16}$ și $\beta = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{25}$.

11. Să se demonstreze inegalitatea: a) $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x, \forall x \geq -1, \forall \alpha > 1$;

b) $\ln(1+x)^2 < x, \forall x > 0$.

12. (BAC, 2009) Determinați extremele globale ale funcției $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin 2x - 2x$.

§2 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

Am stabilit deja ce informații pot fi obținute despre comportarea unei funcții derivabile cunoscând derivata ei, mai precis, zerourile și semnul derivatei. Însă simpla cunoaștere a faptului că o funcție f este, de exemplu, strict crescătoare pe un interval I nu este suficientă pentru a stabili forma graficului acesteia. De exemplu, funcția f , definită pe $[0, +\infty)$ prin formula $f(x) = \sqrt{x}$, este strict crescătoare pe acest interval, însă această informație este insuficientă pentru a decide dacă graficul funcției f are forma curbei color sau a curbei de culoare neagră (fig. 5.2).

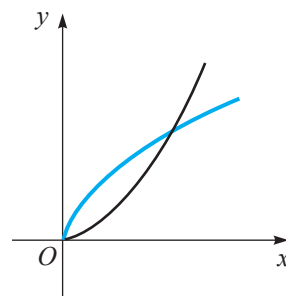


Fig. 5.2

Forma graficului unei funcții poate fi determinată cu ajutorul derivatei a doua.

2.1. Convexitate și concavitate

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) o funcție derivabilă pe intervalul *deschis* I . Presupunem că tangenta în orice punct al graficului funcției f se află sub grafic (fig. 5.3 a)) sau deasupra lui (fig. 5.3 b)).

În cazul a) se spune că graficul funcției f este o *curbă convexă*, iar în cazul b) – o *curbă concavă*.

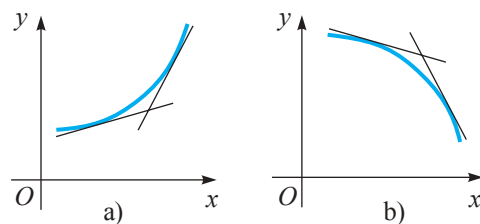


Fig. 5.3

Vom formula o definiție riguroasă a convexității (concavității) și vom arăta că derivata a doua, dacă există, furnizează informații concrete în această privință.

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I și $x_0 \in I$. Tangenta la graficul funcției f în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este dreapta de ecuație

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Fie funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Graficul funcției F este tangenta M_0T (fig. 5.4).

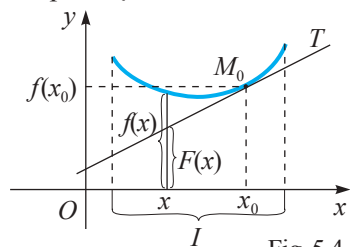


Fig. 5.4

Se spune că tangenta M_0T se află **sub graficul funcției f** dacă

$$F(x) \leq f(x), \quad \forall x \in I. \quad (1)$$

Se spune că tangenta M_0T se află **deasupra graficului funcției f** dacă

$$F(x) \geq f(x), \quad \forall x \in I. \quad (2)$$

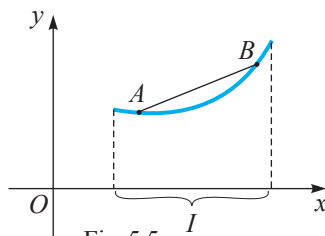
Dacă inegalitatea (1) (inegalitatea (2)) este strictă pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$, se spune că tangenta M_0T se află **strict sub graficul funcției f** (**strict deasupra graficului lui f**).

Definiții. • Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) se numește **convexă (strict convexă)** pe intervalul I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f se află sub (strict sub) acest grafic.

• Funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) se numește **concavă (strict concavă)** pe intervalul I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției f se află deasupra (strict deasupra) acestui grafic.

• Vom spune că graficul funcției f este o **curbă convexă (strict convexă)** sau o **curbă concavă (strict concavă)** pe intervalul I dacă funcția f posedă proprietatea respectivă pe acest interval.

Observații. 1. Definiția convexității graficului unei funcții poate fi formulată și astfel: pentru orice coardă AB cu abscisele aparținând intervalului I , porțiunea graficului care unește punctele A și B este situată sub această coardă (fig. 5.5).



2. Funcția f este concavă pe intervalul I dacă și numai dacă funcția $-f$ este convexă pe I .

3. Uneori se mai spune că funcțiile convexe au „concavitatea în sus” (graficul lor „ține apa”, fig. 5.6 a)), iar funcțiile concave au „concavitatea în jos” (graficul lor „nu ține apa”, fig. 5.6 b)).

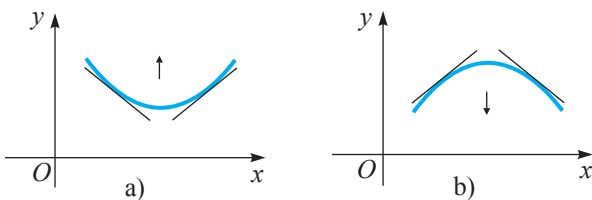


Fig. 5.6

Studiul concavității/convexității în baza definiției este dificil chiar în cazul funcțiilor elementare. Pentru funcțiile derivabile de două ori, determinarea intervalelor de concavitate/convexitate se reduce la studiul semnului derivatei a doua.

Teorema 3. Dacă funcția $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe (a, b) și $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci această funcție este convexă pe acest interval.

Înlocuind f cu $-f$ și ținând cont de observația 2, obținem următorul

Corolar. Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe (a, b) . Dacă $f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci funcția f este concavă pe (a, b) .

Observație. Dacă $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), $\forall x \in (a, b)$, atunci funcția f este strict convexă (strict concavă) pe (a, b) .

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;

b) $f(x) = x^3$.

Rezolvare:

a) Funcția f satisface condițiile teoremei 3 și $f''(x) = 2a$. Așadar, funcția f este strict convexă pe $\mathbb{R}$, dacă $a > 0$, și strict concavă pe $\mathbb{R}$, dacă $a < 0$.

b) $f''(x) = 6x$. Prin urmare, funcția f este strict concavă pe $(-\infty, 0)$ și strict convexă pe $(0, +\infty)$.

2.2. Determinarea intervalelor de concavitate, convexitate.

Puncte de inflexiune

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul deschis I și $x_0 \in I$ un punct critic al funcției f , adică $f'(x_0) = 0$. Am stabilit deja că dacă funcția f' are semne diferite la stânga și la dreapta punctului x_0 , atunci x_0 este punct de extrem local al funcției f . Există însă cazuri în care este dificil de a stabili semnul derivatei la stânga și la dreapta punctelor critice. În aceste situații vom aplica următorul *criteriu suficient pentru extrem*, fără a mai studia semnul funcției f' , cu condiția că funcția f este de două ori derivabilă pe I .

Teorema 4. Dacă $x_0 \in (a, b)$ este un punct critic al funcției $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe (a, b) și dacă $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), atunci x_0 este un punct de minim local (maxim local) al funcției f .

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine punctele de extrem local și extremele locale ale funcției definite prin formula $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

Rezolvare:

Calculăm derivatele de ordinele unu și doi: $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$ și $f''(x) = 6x + 12$. Funcția f' se anulează în punctele $x_1 = -3$ și $x_2 = -1$. Cum $f''(-3) = -6 < 0$ și $f''(-1) = 6 > 0$, în baza teoremei 4 deducem că $x_1 = -3$ este punct de maxim local al funcției f și $f(-3) = 0$ este maximul ei local, iar $x_2 = -1$ este punct de minim local al funcției f și $f(-1) = -4$ este minimul ei local.

Dacă funcția f este de două ori derivabilă în vecinătatea punctului x_0 în care $f''(x_0) = 0$ și dacă funcția f'' are semne diferite la stânga și la dreapta punctului x_0 , atunci funcția f își schimbă concavitatea în acest punct. De exemplu, dacă $f''(x) > 0$ pentru $x < x_0$ și $f''(x) < 0$ pentru $x > x_0$ (x aparține unei vecinătăți a punctului x_0), atunci funcția f este convexă la stânga lui x_0 și concavă la dreapta lui x_0 .

Definiție. Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe (a, b) .

Punctul $x_0 \in (a, b)$ se numește **punct de inflexiune al funcției f** dacă există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, astfel încât funcția f este convexă pe $(x_0 - \delta, x_0)$ și concavă pe $(x_0, x_0 + \delta)$ sau invers (fig. 5.7).

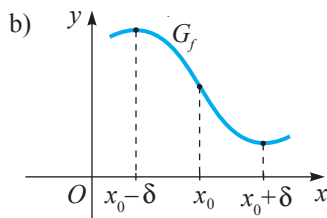
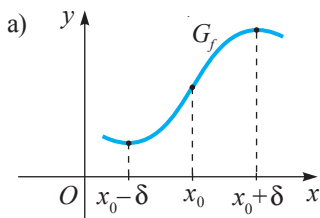


Fig. 5.7

Observație. Dacă x_0 este un punct de inflexiune al funcției f , atunci $M_0(x_0, f(x_0))$ se numește **punct de inflexiune pentru graficul** acestei funcții.

Teorema 5. Fie $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate $V(x_0)$ a punctului $x_0 \in (a, b)$ și $f''(x_0) = 0$. Dacă $f''(x) < 0, \forall x \in V(x_0), x < x_0$, și $f''(x) > 0, \forall x \in V(x_0), x > x_0$, sau invers (dacă $f''(x) > 0, \forall x \in V(x_0), x < x_0$, și $f''(x) < 0, \forall x \in V(x_0), x > x_0$), atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f .

Remarcăm: condiția $f''(x_0) = 0$ nu implică faptul că x_0 este punct de inflexiune al funcției f , după cum condiția $f'(x_0) = 0$ nu implică faptul că x_0 este punct de extrem local al funcției f .

Intervalele de convexitate, de concavitate și punctele de inflexiune ale unei funcții f de două ori derivabilă pe un interval pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

- ① Se calculează f'' și se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$ (unele dintre soluțiile acestei ecuații pot fi puncte de inflexiune ale funcției f).
- ② Se stabilesc intervalele pe care funcția f'' are semn constant, acestea fiind intervalele de convexitate sau de concavitate ale funcției f .
- ③ Se determină punctele de inflexiune ale funcției f .

Observație. Dacă în punctul x_0 nu există f'' sau f'' este infinită, atunci acest punct de asemenea este un eventual punct de inflexiune al funcției f .

Exercițiu rezolvat

☛ Să se determine extremele locale, punctele de inflexiune, intervalele de concavitate și de convexitate ale funcției:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 4x + 6)e^{-x}$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = 3x(x - 2)$, deci funcția f are două puncte critice: $x_1 = 0$ și $x_2 = 2$. Cum $f''(x) = 6(x - 1)$, rezultă că $f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$. Astfel, $x_1 = 0$ este punct de

maxim local, iar $x_2 = 2$ este punct de minim local al funcției f . Semnul funcției f'' este indicat în tabloul de variație al funcției f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-	0	+
f			

Așadar, funcția f este strict concavă pe $(-\infty, 1)$ și strict convexă pe $(1, +\infty)$, iar 1 este un punct de inflexiune.

b) $f'(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ și $f''(x) = x^2 e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții în $\mathbb{R}$. Cum funcția f' este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f'(0) = -2$, rezultă că $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Astfel, funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x_1 = 0$. Punctul 0 nu este punct de inflexiune al funcției f , deoarece $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prin urmare, graficul funcției f este convex pe $\mathbb{R}$.

Exerciții propuse

Profilul real

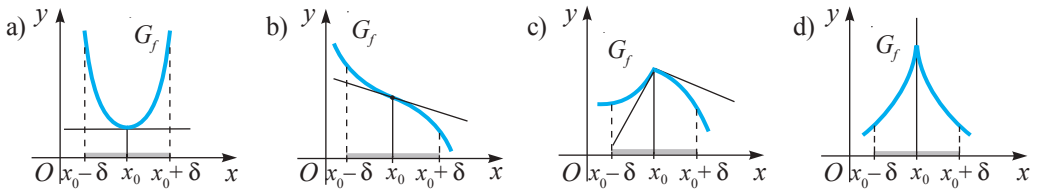
A₁ 1. Să se determine intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = x^3 + 9x^2 - x + 1$; b) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$; c) $f(x) = \sin x$; d) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$;
e) $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$; f) $f(x) = x^2 \ln x$; g) $f(x) = x \sin(\ln x)$.

2. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$;
c) $f(x) = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$); d) $f(x) = x + \sin x$;
e) $f(x) = x + x^{\frac{5}{3}}$; f) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$; g) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

B₁ 3.  **Lucrați în perechi!** Fie funcțiile reprezentate grafic:



Pentru fiecare funcție să se transcrie și să se completeze tabloul de variație:

x	$x_0 - \delta$	x_0	$x_0 + \delta$
f'			
f''			
f			

4. Fie funcția $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă.

În tabel sunt indicate semnele funcțiilor f' și f'' .

1) În baza acestor informații, să se completeze ultima linie indicând:

- a) creșterea ($\nearrow$), descreșterea ($\searrow$), convexitatea ($\cup$), concavitatea ($\cap$) funcției f ;
b) punctele de extrem;
c) punctele de inflexiune.

x	0	1	2	3	4
f'	+	+	-	+	
f''	+	-	-	+	
f					

2) Să se traseze graficul unei funcții cu un astfel de tablou de variație.

C₁ 5.  **Investigați!** Să se arate că:

- funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, este concavă și convexă;
- funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, este concavă pentru $a < 0$ și convexă pentru $a > 0$.

6.  **Investigați!** Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabile și $\alpha > 0$.

- Să se arate că:
 - dacă funcțiile f și g sunt convexe (concave), atunci funcția $f + g$ este convexă (concavă);
 - dacă funcția f este convexă (concavă), atunci funcția αf este convexă (concavă) pentru orice $\alpha > 0$.
- Să se dea un exemplu de două funcții f și g convexe (concave), astfel încât funcția $f + g$ să nu fie convexă (concavă).

§3 Reprezentarea grafică a funcțiilor

A reprezenta grafic o funcție $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ înseamnă a trasa (a desena) graficul ei $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ într-un sistem de axe ortogonale xOy . Pentru trasarea graficului funcției f recomandăm parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice funcției date.

I. Domeniul de definiție al funcției. Dacă domeniul de definiție al funcției f nu este specificat, se *subînțelege* că este indicat domeniul ei maxim de definiție, format din mulțimea $D \subseteq \mathbb{R}$, pentru care $f(x)$, $x \in D$, are sens. În probleme cu conținut fizic, economic, geometric etc. pot fi restricții suplimentare referitoare la domeniul respectiv de definiție (studiu).

După ce a fost determinat domeniul de definiție al funcției f , se află punctele de intersecție a graficului ei cu axele de coordonate: cu axa Ox ($y = 0$) – sunt punctele de forma $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, ..., $x_1, x_2, \dots$ fiind soluțiile ecuației $f(x) = 0$ (dacă acestea există); cu axa Oy ($x = 0$) – este punctul $(0, f(0))$, dacă $0 \in D$.

II. Semnul funcției și eventualele simetrii ale graficului. Dacă $f \geq 0$ ($f \leq 0$), atunci graficul funcției f este situat deasupra (respectiv dedesubtul) axei Ox .

Dacă f este o funcție pară (impară), atunci graficul ei este simetric față de axa Oy (respectiv față de originea sistemului xOy), și în acest caz este suficient ca domeniul de studiu să fie $D \cap [0, +\infty)$.

Dacă f este o funcție periodică, atunci este suficient să se studieze funcția pe un interval de lungime egală cu perioada principală a acesteia pentru ca apoi graficul ei să se traseze prin translații paralele pe mulțimea D .

III. Limite la capetele intervalelor, continuitatea funcției, asimptote. Dacă mulțimea D este nemărginită, atunci se calculează (dacă există) limita funcției f la $+\infty$ (sau/și la $-\infty$), se determină (dacă există) asimptotele orizontale, oblice ale graficului funcției f .

Dacă D este o reuniune de intervale, atunci se calculează limitele laterale ale funcției f la capetele fiecăruia dintre aceste intervale. Simultan se determină eventualele asimptote verticale. De asemenea, se determină mulțimea de puncte ale mulțimii D în care funcția f este continuă, iar în punctele de discontinuitate se calculează limitele laterale.

IV. Derivata întâi. Se calculează f' . Se stabilește mulțimea $D_{f'}$ pe care funcția f este derivabilă. Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$, adică se determină punctele critice ale funcției f . Soluțiile acestei ecuații, precum și punctele în care funcția f nu este derivabilă sau în care derivata ei este infinită, sunt eventualele puncte de extrem local ale acestei funcții. Ele divizează mulțimea D într-un număr finit (sau infinit) de intervale. Se studiază semnul funcției f' pe fiecare dintre intervalele obținute. Astfel se stabilesc intervalele de monotonie, punctele de extrem local și extremele locale ale funcției f .

Dacă funcția f este de două ori derivabilă, atunci, pentru trasarea graficului ei cu o exactitate sporită, se execută etapa V.

V. Derivata a doua. Se calculează f'' și se rezolvă ecuația $f''(x)=0$. Soluțiile acestei ecuații, precum și punctele în care derivata a doua nu există sau este infinită, sunt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f . Se stabilesc intervalele pe care derivata a doua are semn constant, se determină semnul funcției f'' pe aceste intervale (acestea fiind intervale de concavitate și/sau de convexitate ale funcției f) și se determină punctele ei de inflexiune.

VI. Tabloul de variație al funcției f include rezultatele obținute în etapele I–V.

În linia întâi se trece informația referitoare la domeniul de definiție al funcției f și la valorile remarcabile ale lui x (zerourile derivatelor întâi și a doua, punctele în care derivatele f' și f'' nu există ori sunt infinite).

În linia a doua se trece informația referitoare la derivata întâi, obținută în etapa a IV-a. În coloana fiecărui zerou al derivatei se scrie 0. Se scrie semnul derivatei pe intervalele obținute.

În linia a treia se trece informația referitoare la derivata a doua, obținută în etapa a V-a. În coloana fiecărui zerou al derivatei a doua se scrie 0. Se scrie semnul derivatei a doua pe intervalele obținute.

În ultima linie, prin săgeți „ $\nearrow$ ”, „ $\searrow$ ” se notează monotonia funcției f , iar simbolurile „ $\cup$ ”, „ $\cap$ ” arată convexitatea, respectiv concavitatea ei; literele $\overline{m}$, $\overline{M}$ sau i semnifică faptul că punctul respectiv este punct de minim local, de maxim local sau punct de inflexiune.

VII. Trasarea graficului. Într-un sistem de axe ortogonale xOy se trasează întâi asimptotele graficului funcției f (dacă acestea există), apoi punctele remarcabile $(x, f(x))$ din tabloul de variație al funcției f . Punctele remarcabile ale graficului funcției f se unesc printr-o linie curbă, ținându-se cont de paritatea, periodicitatea, monotonia, asimptotele, convexitatea și/sau concavitatea funcției f .

Observație. Etapa a V-a poate fi omisă în cazul unor dificultăți de calcul.

Vom trasa graficele unor funcții, parcurgând sistematic etapele menționate.

Exerciții rezolvate

1. Să se traseze graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$;

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

c) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

Rezolvare:

a) I. Domeniul maxim de definiție al funcției f este $\mathbb{R}$.

Pentru $x=0$ avem $f(0)=0$. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 3\}$. Așadar, graficul funcției f trece prin originea sistemului de axe ortogonale xOy și intersectează axa Ox în punctul $x_0 = 3$.

II. Funcția f nu este nici pară, nici impară, deoarece $f(-x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 3x$ și $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$. Cum $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 9x) = \frac{1}{3}x(x-3)^2$, rezultă că $f(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$ și $f(x) \leq 0$ pentru $x \leq 0$.

III. Funcția f este continuă pe mulțimea $\mathbb{R}$, deci asimptote verticale nu are.

Calculăm limitele la capetele intervalului $(-\infty, +\infty)$. Avem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x(x-3)^2 = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x(x-3)^2 = +\infty.$$

Astfel, graficul funcției f nu are asimptote oblice și nici orizontale.

IV. $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 3\}$. Punctele $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$ sunt puncte critice.

V. Renunțăm la studiul derivatei a doua, întrucât acest exemplu este prevăzut și pentru profilul umanistic.

VI. Alcătuim tabloul de variație al funcției f :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	$\underline{m}$	$\nearrow$

Constatăm că $\overline{M} = f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$,

$$\underline{m} = f(3) = 9 - 18 + 9 = 0.$$

VII. Graficul funcției f este reprezentat în figura 5.8.

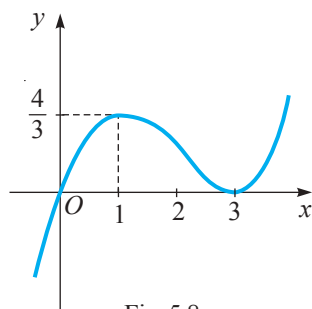


Fig. 5.8

b) I. Domeniul maxim de definiție al funcției f este mulțimea $\mathbb{R}$.

Graficul funcției f intersectează axele de coordonate numai în originea lor.

II. Funcția f nu este periodică; f este impară, deoarece este definită pe $\mathbb{R}$ și $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, este suficient să restrângem domeniul de studiu ($\mathbb{R}$) la mulțimea $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

III. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. Limitele ei la capetele intervalului $(-\infty, +\infty)$ sunt $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$. Așadar, dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și la $+\infty$ a graficului funcției f .

IV. $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=1$ (punctele critice ale funcției f). Pentru $x>0$ se acceptă numai $x_2=1$. Evident, $f(1)=0,5$.

V. $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Soluția ecuației $f''(x)=0$ pentru $x>0$ este $x_3=\sqrt{3}$.

VI. Tabloul de variație al funcției f pentru $x \geq 0$ este cel alăturat, în care $\bar{M} = f(1)=0,5$ este un maxim local, iar $\sqrt{3}$ este un punct de inflexiune. Punctul 0 este de asemenea un punct de inflexiune.

VII. Trasăm graficul funcției f pe $\mathbb{R}_+$ (fig. 5.9). Cum funcția f este impară, construim, față de originea sistemului de axe ortogonale xOy , simetricul graficului trasat pe mulțimea $\mathbb{R}_+$ și obținem graficul funcției f pe mulțimea $\mathbb{R}$.

x	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$		
f'		+	0	-	-	
f''	0	-	-	-	0	+
f	i	$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	i	$\searrow$

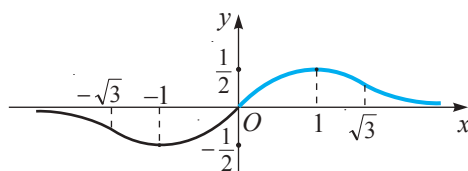


Fig. 5.9

c) I. $D = \mathbb{R}$. Pentru $x=0$ avem $f(0)=0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Graficul funcției f intersectează axa Oy în origine, iar axa Ox – în punctele $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II. Funcția f este impară, periodică cu perioada principală 2π . Deci, vom studia funcția f pe $[0, 2\pi]$, iar la trasarea graficului ei vom ține cont de simetria acestuia față de originea sistemului de coordonate și de periodicitatea funcției f .

III. Funcția f este continuă, asimptote nu are.

IV. $f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$. Ecuația $f'(x)=0$ pe $[0, 2\pi]$ are două soluții: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ și $x_2 = \frac{4\pi}{3}$.

V. Fiind complicat, renunțăm la studiul derivatei a doua.

VI. Alcătuim tabloul de variație al funcției f (pe $[0, 2\pi]$):

$$\text{Constatăm că } \bar{M} = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\bar{m} = f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π
f'	+	0	-	0
f	$\nearrow$	$\overline{M}$	$\searrow$	$\overline{m}$

VII. Trasăm graficul funcției f pe $[0, 2\pi]$, apoi, prin translații, îl prelungim pe mulțimea $\mathbb{R}$ periodic cu perioada 2π . O porțiune a graficului funcției f este reprezentată în figura 5.10.

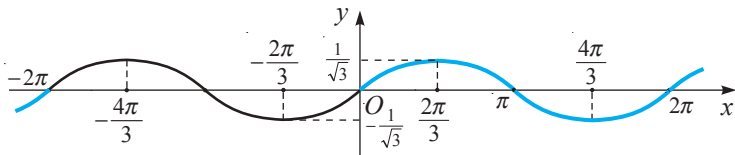


Fig. 5.10

2. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x(x+a)}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se traseze graficul funcției f , știind că el trece prin punctul de coordonate $(1, 1)$.

Rezolvare:

I. Cum punctul $(1, 1) \in G_f$, obținem: $f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{1(1+a)} = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Așadar, $f(x) = \frac{2x^2+1}{x(x+2)}$ și domeniul maxim de definiție al funcției f este mulțimea

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty).$$

Graficul funcției f nu intersectează axele de coordonate.

II. Funcția f nu este periodică; f nu este nici pară, nici impară; $f(x) \geq 0$ dacă și numai dacă $x(x+2) > 0$ ($x \in D$), adică $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, și $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$.

III. Funcția f este continuă pe D . Limitele ei la capetele intervalului $(-2, 0)$ sunt:

$$l_s(-2) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = +\infty, \quad l_d(-2) = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = -\infty,$$

$$l_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = -\infty, \quad l_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = +\infty.$$

Prin urmare, dreptele de ecuații $x = -2$ și $x = 0$ sunt asimptote verticale la stânga și la dreapta pentru graficul funcției f .

Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x(x+2)} = 2$, rezultă că dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și la $+\infty$ pentru graficul funcției f .

$$\text{IV. } f'(x) = \frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2(x+2)^2}, \quad \forall x \in D \text{ și } f'(x) = 0 \text{ dacă } x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1.$$

V. Fiind complicat, renunțăm la studiul derivatei a doua.

VI. Tabloul de variație al funcției f este următorul:

Constatăm că $\bar{m} = f(1) = 1$

$$\text{și } \bar{M} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
f'	+	+	+	0	-	-
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\bar{M}$	$\searrow$	$\searrow$	$\bar{m}$

VII. Graficul funcției f este reprezentat în figura 5.11.

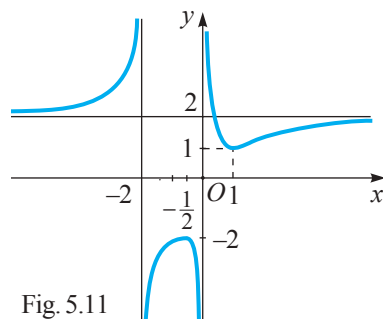


Fig. 5.11

Exerciții propuse

Profilul real

A₁ 1. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$;

b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$;

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

d) $f(x) = x^2(x-1)^2$.

B₁ 2. Să se traseze graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (în cazul unor eventuale dificultăți de calcul, etapa cu derivata a doua poate fi omisă):

a) $f(x) = x \ln x$;

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$;

c) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$;

d) $f(x) = e^{-x^2}$;

e) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$;

f) $f(x) = \frac{|1-x^2|}{x}$;

g) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$;

h) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

3. Știind că suma lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu a :

a) să se exprime aria acestui triunghi în funcție de lungimea unei catete;

b) să se construiască graficul funcției obținute;

c) să se determine aria maximă a acestui triunghi (cea mai mare valoare a funcției obținute).

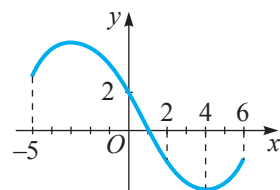
4. (BAC, 2015) În desen este reprezentat graficul funcției derivabile $f: [-5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Utilizând desenul, scrieți în casetă unul dintre semnele „<”, „>” sau „=”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $f'(-1) \square 0$;

b) $f'(4) \square 0$;

c) $f''(-4) \square 0$;

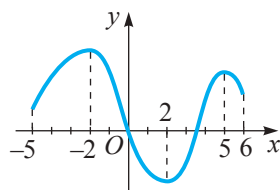
d) $f''(2) \square 0$.



5. (BAC, 2014) În desen este reprezentat graficul funcției $f: [-5, 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Scrieți în casetă mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $f'(x) > 0$, $S = \square$;

b) $f'(x) < 0$, $S = \square$.



§4

Aplicații ale derivatelor în fizică, geometrie și economie. Probleme de maxim și minim

Vom aplica rezultatele teoretice obținute anterior privind determinarea punctelor de extrem ale unor funcții. Astfel, vom exemplifica eficacitatea aplicării metodelor analizei matematice la rezolvarea unor probleme de fizică, geometrie, economie etc. ce au ca obiectiv determinarea parametrilor optimi de funcționare a unor sisteme tehnice, economice, care ar asigura un randament maxim, o putere maximă, ar optimiza consumul de energie, de timp, ar minimaliza pierderile. Rezolvând atare probleme, se realizează un anumit procedeu, numit *optimizare*, care constă în alegerea și în aplicarea celei mai potrivite soluții din mai multe posibile, în selectarea parametrilor ce corespund maximului sau minimului unei funcții. Menționăm că rezolvarea unor astfel de probleme nu întotdeauna este posibilă dacă sunt folosite doar metodele algebrei sau geometriei elementare.

Pentru a determina valoarea maximă sau minimă a unei mărimi, vom exprima valorile acesteia printr-o funcție, apoi vom studia variația funcției obținute.

Probleme rezolvate

1. Dintr-o bucată de tablă de formă dreptunghiulară cu laturile de 50 cm și 80 cm se decupează în fiecare colț un pătrat (fig. 5.12), apoi se îndoaie marginile formate. Se obține o cutie de forma unui paralelipiped dreptunghic fără capac. Să se determine înălțimea cutiei, astfel încât volumul ei să fie maxim.

Rezolvare:

Notăm cu x lungimea laturii pătratului decupat și calculăm volumul $V(x)$ al cutiei obținute:

$$V(x) = x(50 - 2x)(80 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x,$$

unde x variază în intervalul $\left[0, \frac{50}{2}\right] = [0, 25]$. Astfel,

problema se reduce la determinarea celei mai mari valori a funcției $V: [0, 25] \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

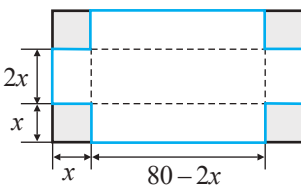


Fig. 5.12

Aflăm extremele funcției V . Avem $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$. Rezolvăm ecuația $V'(x) = 0$ și obținem că în $[0, 25]$ ea are o soluție unică: $x_0 = \frac{130 - \sqrt{4900}}{6} = 10$.

Cum $V(0) = V(25) = 0$, rezultă că în punctul x_0 funcția V ia cea mai mare valoare.

Răspuns: Cutia are volum maxim dacă înălțimea ei este de 10 cm.

2. Dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru $2a$, să se afle cel cu aria maximă.

Rezolvare:

Fie x lungimea laturii AB a dreptunghiului $ABCD$, $AD > AB$ (fig. 5.13). Atunci $AD = \frac{2a - 2x}{2} = a - x$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este $A(x) = x(a - x) = -x^2 + ax$.

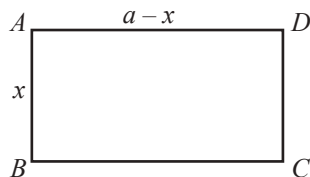


Fig. 5.13

Considerăm funcția $\mathcal{A}: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(x) = -x^2 + ax$.

Atunci $\mathcal{A}'(x) = -2x + a$. $\mathcal{A}'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Obținem tabloul de variație al funcției $\mathcal{A}: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$:

Dreptunghiul $ABCD$ are aria maximă $\mathcal{A}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ dacă el este un pătrat cu latura $\frac{a}{2}$.

Răspuns: $\mathcal{A}_{\max} = \frac{a^2}{4}$ unități pătrate.

x	0	$\frac{a}{2}$	a
$\mathcal{A}'(x)$		+	-
$\mathcal{A}(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Consecință. Dacă suma a două numere pozitive este cunoscută, produsul lor este maxim în cazul în care numerele sunt egale.

Se poate demonstra că suma a două numere pozitive, cu produsul lor constant, este minimă dacă numerele sunt egale.

3. Să se determine coordonatele punctului graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, aflat la distanța minimă de punctul $M(10, 5)$ (fig. 5.14).

Rezolvare:

Orice punct A al graficului funcției f are abscisa x și ordonata $x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\varphi(x)$ distanța dintre punctele M și A și obținem:

$$\varphi(x) = \sqrt{(x-10)^2 + (x^2+3-5)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}.$$

Problema se reduce la determinarea minimului funcției

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}.$$

$$\text{Avem: } \varphi'(x) = \frac{2x^3 - 3x - 10}{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 20x + 104}} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Punctul $x_0 = 2$ este punct de minim local pentru funcția φ , deoarece $\varphi' < 0$, dacă $x < 2$, și $\varphi' > 0$, dacă $x > 2$.

Atunci $f(2) = 2^2 + 3 = 7$. Astfel, coordonatele punctului A sunt 2 și 7.

Răspuns: Punctul are coordonatele 2 și 7.

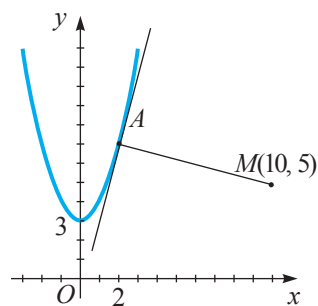


Fig. 5.14

4. Un lot de pământ de formă dreptunghiulară trebuie îngrădit, știind că dintr-o parte este deja construit gard. Prețul unui metru de gard paralel cu gardul deja construit este de 100 de lei, iar al unui metru de restul gardului – de 150 de lei. Să se determine aria maximă care poate fi îngrădită, dacă se dispune de 18000 de lei.

Rezolvare:

Fie x și y dimensiunile lotului, atunci, din condiția problemei, avem:

$$100 \cdot x + 2 \cdot 150 \cdot y = 18000 \Leftrightarrow x + 3y = 180 \Leftrightarrow y = 60 - \frac{x}{3}.$$

$$\text{Aria lotului } \mathcal{A}(x) = x \cdot y = x \left(60 - \frac{x}{3}\right). \quad \mathcal{A}'(x) = 60 - \frac{2}{3}x.$$

Pentru $\mathcal{A}'(x) = 0$ obținem $60 - \frac{2}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 90$.

Deoarece $\mathcal{A}''(x) = -\frac{2}{3} < 0$, rezultă că în $x = 90$ funcția $\mathcal{A}(x)$ are un maximum.

Prin urmare, aria maximă care poate fi îngrădită $\mathcal{A}_{\max} = 90 \cdot \left(60 - \frac{90}{3}\right) = 2\,700 \text{ (m}^2\text{)}$.

Răspuns: $2\,700 \text{ m}^2$.

5. Să se determine traseul cel mai economic pentru construirea unei căi ferate între localitățile A și B , știind că o porțiune de lungime d a ei trebuie construită paralel și în imediata vecinătate a unei șosele.

Rezolvare:

Fie h_1, h_2 distanțele dintre A , respectiv B , și șosea, a – distanța dintre proiecțiile punctelor A și B pe direcția șoselei (fig. 5.15).

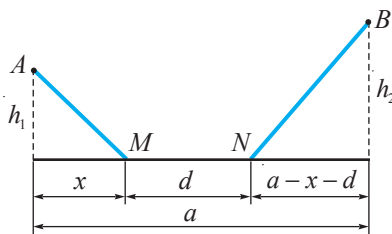


Fig. 5.15

Evident, costul traseului este direct proporțional cu lungimea traseului $L(x)$. Din figură avem:

$$L(x) = AM + MN + NB = \sqrt{x^2 + h_1^2} + d + \sqrt{h_2^2 + (a - x - d)^2}.$$

$$\text{Avem } L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{a - x - d}{\sqrt{h_2^2 + (a - x - d)^2}}.$$

$$\text{Soluțiile ecuației } L'(x) = 0 \text{ sunt } x_1 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 + h_2}, \quad x_2 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 - h_2}.$$

În punctul $x_1 = \frac{(a-d)h_1}{h_1 + h_2}$, funcția $L(x)$ are un minim, deoarece $L''(x_1) > 0$.

$$\text{Așadar, } L_{\min} = L(x_1) = \sqrt{(a-d)^2 + (h_1 + h_2)^2} + d.$$

6. Cererea pe piață pentru un produs este descrisă de funcția definită prin formula $p(x) = 780 - 2x - 0,1x^2$, unde x este numărul de unități de produs, iar p – prețul (în lei).

Cheltuielile medii de fabricare a unei unități de produs se descriu de funcția definită prin formula $\bar{C}(x) = \frac{1000}{x} + 500 + 2x$. (Funcția cererii și funcția cheltuielilor medii se determină în baza datelor statistice.)

Să se determine beneficiul brut maxim obținut din vânzarea produsului și prețul respectiv.

Rezolvare:

Beneficiul brut $B(x)$ este egal cu diferența dintre prețul de vânzare și cheltuielile de fabricare a produsului, adică $B(x) = p(x) \cdot x - \bar{C}(x) \cdot x =$

$$= (780 - 2x - 0,1x^2)x - \left(\frac{1000}{x} + 500 + 2x\right)x = 280x - 4x^2 - 0,1x^3 - 1000.$$

$$\text{Derivata } B'(x) = 280 - 8x - 0,3 \cdot x^2.$$

Din $B'(x) = 0$ obținem ecuația $0,3x^2 + 8x - 280 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 20$, $x_2 = -\frac{28}{0,6}$ (care nu corespunde condiției problemei). Deoarece $B''(20) < 0$, în punctul $x = 20$ avem maxim. Astfel, obținem beneficiul brut maxim $B(20) = 280 \cdot 20 - 4 \cdot 20^2 - 0,1 \cdot 20^3 - 1000 = 2200$ (lei) și prețul respectiv $p(20) = 780 - 2 \cdot 20 - 0,1 \cdot 20^2 = 700$ (lei).

Răspuns: 2200 lei; 700 lei.

7. Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză medie de v km/h (cu condiția că $40 \leq v \leq 70$), consumând $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right)$ litri/h de benzină. Să se afle viteza optimă (pentru care cheltuielile sunt minime), știind că șoferul este retribuit cu 30 lei/h, iar benzina costă 15 lei litrul.

Rezolvare:

Distanța a fost parcursă în $\frac{100}{v}$ ore, în care s-au consumat $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right) \cdot \frac{100}{v} = \frac{v^2 + 2400}{3v}$ litri de benzină. În aceste condiții, cheltuielile totale pentru întregul parcurs sunt

$$c(v) = 30 \cdot \frac{100}{v} + 15 \cdot \frac{v^2 + 2400}{3v} = \frac{5v^2 + 15000}{v} \text{ (lei)}.$$

Viteza optimă este cea pentru care cheltuielile totale sunt minime. Rezolvăm ecuația $c'(v) = \frac{5v^2 - 15000}{v^2} = 0$ și obținem $v_0 = \sqrt{3000} \approx 54,77$ (km/h). Prin urmare, pentru această valoare a vitezei cheltuielile totale sunt minime.

Răspuns: $v_{\text{optim}} \approx 54,77$ km/h.

8. Un muncitor trebuie să deplaseze o piesă de bronz pe o placă de fontă așezată pe un plan orizontal, cu ajutorul unei forțe $\vec{Q}$. Masa piesei este de 100 kg, iar coeficientul de frecare dintre bronz și fontă $\mu = 0,2$. Să se determine măsura unghiului α , format de direcția forței și planul orizontal, astfel încât forța $\vec{Q}$ necesară acestei deplasări să fie minimă.

Rezolvare:

Din figura 5.16 se constată că echilibrul dinamic al forțelor de frecare $\vec{F}$, de tracțiune $\vec{Q}$, de greutate $\vec{G}$ și de reacțiune $\vec{N}$ este asigurat dacă:

$$\begin{cases} Q \cos \alpha - F = 0, \\ N + Q \sin \alpha - G = 0. \end{cases}$$

Din acest sistem, substituind formula pentru forța de frecare $F = \mu N$, determinăm funcția $Q(\alpha)$, al cărei minim trebuie aflat:

$$Q(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

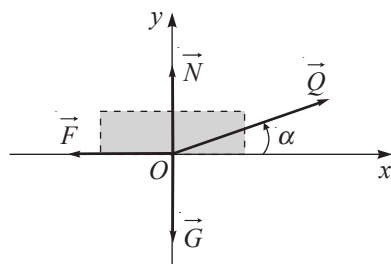


Fig. 5.16

Astfel, problema se reduce la determinarea celei mai mici valori a funcției $Q: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$.

Aflăm extremele funcției Q . Avem $Q'(\alpha) = -\frac{\mu G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2}$. Soluția ecuației $Q'(\alpha) = 0$ este $\alpha = \arctg \mu$. Pentru această valoare funcția $Q(\alpha)$ are un minim:

$$Q_{\min} = Q(\arctg \mu) = \frac{\mu G}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

Substituind datele problemei, obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx 0,2; \quad \alpha \approx 11^\circ 20' \quad \text{și} \quad Q = \frac{0,2 \cdot 100}{\sqrt{1 + 0,2^2}} \approx 19,6 \text{ kg}.$$

Răspuns: $\approx 11^\circ 20'$.

9. Să se determine înălțimea la care trebuie așezată o sursă de lumină deasupra unei platforme circulare de rază a pentru ca iluminarea platformei să fie maximă, știind că intensitatea luminoasă I pe direcția verticală este constantă, iar iluminarea¹ E este dată de formula $E = \frac{I \cdot \cos \alpha}{r^2}$, unde α este unghiul de incidență a razelor pe această suprafață.

Rezolvare:

Notăm cu x distanța de la sursa de lumină până la platformă. Din figura 5.17 obținem:

$$r^2 = a^2 + x^2 \quad \text{și} \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Prin urmare, funcția al cărei maxim trebuie determinat este $E = E(x) = \frac{I \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in (0, +\infty)$.

Egalând derivata cu zero, obținem:

$$E'(x) = I \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + x^2)^3} = 0,$$

soluția fiind $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Pentru această valoare funcția $E(x)$ are un maxim: $E_{\max} = \frac{2I}{3\sqrt{3}a^2}$.

Răspuns: $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

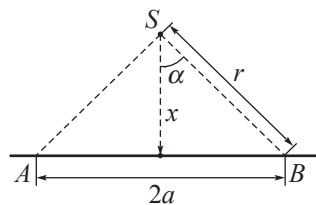


Fig. 5.17

10. Care trebuie să fie rezistența unui circuit extern, astfel încât sursa de curent cu tensiunea electromotoare $\varepsilon = 10 \text{ V}$ și rezistența internă $r = 20 \Omega$ să debiteze o putere maximă? Care este valoarea numerică a acestei puteri?

Rezolvare:

Notăm cu x rezistența circuitului extern și cu P puterea curentului electric pe circuitul extern. Atunci, conform formulei pentru puterea curentului, avem: $P = I^2 x$, unde I este intensitatea curentului, care poate fi determinată din legea lui Ohm: $I = \frac{\varepsilon}{x + r}$.

¹ Unitatea de măsură pentru iluminare este luxul (lx).

Deci, obținem funcția $P(x) = \frac{\varepsilon^2 \cdot x}{(x+r)^2}$, $x \in (0, +\infty)$, a cărei derivată

$$P'(x) = \varepsilon^2 \frac{(x+r)^2 - 2x(x+r)}{(x+r)^4} = \varepsilon^2 \frac{r-x}{(x+r)^3}$$

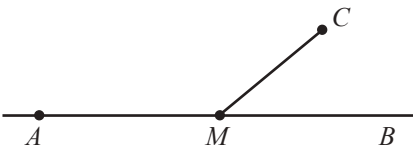
se anulează pentru $x = r$. În $x = r$ funcția $P(x)$ are un maximum. Substituind datele problemei, obținem $P_{\max} = P(r) = \frac{\varepsilon^2}{4r} = \frac{5}{4}$ W.

Răspuns: $x = r$, $P_{\max} = \frac{5}{4}$ W.

Exerciții propuse

Profilul real

- A₁** 1. Un punct material se mișcă rectiliniu conform legii $s(t) = 12t - t^3$ (s este distanța exprimată în metri, iar t – timpul exprimat în secunde).
- Care este viteza punctului material în momentul inițial?
 - Peste cât timp de la plecare punctul material se va opri? Care este distanța parcursă până în acel moment?
2. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = at^3 + bt + c$. Să se determine viteza și accelerația mobilului în momentul t .
3.  **Lucrați în perechi!** Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = t^3 - 6t^2 + 2$. Să se determine:
- momentul în care accelerația sa este nulă;
 - valoarea minimă a vitezei mobilului.
- B₁** 4. Un element galvanic de tensiune electromotoare E și rezistență interioară r produce un curent de intensitate I într-un circuit extern de rezistență R . Intensitatea curentului este dată de relația $I = \frac{E}{r+R}$. Puterea efectivă a elementului galvanic este $P(R) = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}$. Să se determine rezistența R pentru care puterea P este maximă.
- C₁** 5. Într-un triunghi cu o latură de lungime a și înălțimea corespunzătoare acesteia h se înscrie un dreptunghi, astfel încât una dintre laturile sale este conținută de această latură. Să se afle aria maximă a dreptunghiului.
6. Prețul unei unități de produs este de 225 de lei. Cheltuielile de fabricare $C(x)$ sunt date de funcția definită prin formula $C(x) = 95x + x^2$, unde x este numărul de unități de produs fabricate. Să se determine beneficiul brut maxim.
7.  **Lucrați în perechi!** Cheltuielile de fabricare ale unui produs se descriu de funcția definită prin formula $C(x) = 5 + 36x$, iar cererea – de funcția definită prin formula $p(x) = -x^2 + 18x + 3$, $9 < x < 13$. Să se determine numărul unităților de produs, x , pentru care beneficiul brut este maxim, precum și valoarea acestuia.

8. (BAC, 2007) În desen, AB reprezintă o cale ferată, iar C un punct, care se află la distanța de 8 km de la această cale ferată și la distanța de $\sqrt{4964}$ km de la punctul A . Pentru a transporta marfa din punctul A în punctul C , se intenționează să se construiască o șosea (rectilie) din punctul C până la un punct M al căii ferate. Se știe că prețul pentru transportarea unei tone de marfă pe calea ferată este de 30 de lei (pentru un kilometru), iar pe șosea – de 50 de lei (pentru un kilometru). Determinați care trebuie să fie distanța AM , astfel încât prețul pentru transportarea unei tone de marfă din A în C (pe calea AMC) să fie minim.
- 
9.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicarea derivatei în economie*. (Descoperirea noțiunii de elasticitate.)

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real

- A₁** 1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^3 + 6x^2$; b) $f(x) = x^3 - \frac{x}{3}$; c) $f(x) = (x+1)^2$; d) $f(x) = x^2 + x + 1$.
2. Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem local, extremele locale și să se alcătuiască tabloul de variație al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^2 + 2x$; b) $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$;
 c) $f(x) = (x-1)^2(x+2)^2$; d) $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$;
 e) $f(x) = 3 + x - x^2$; f) $f(x) = x^4 - 4x + 2$.
3. Să se afle punctele de extrem local și extremele locale ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$; b) $f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 8$;
 c) $f(x) = x^3 - 12x + 4$; d) $f(x) = x^3 + x - 4$;
 e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - 4x + 1$; f) $f(x) = x^2(x+1)^3$.
4. Pe intervalul indicat, să se determine extremele globale ale funcției $f: I \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, $I = [0; 1]$; b) $f(x) = x^3 - x + 2$, $I = [0; 2]$.
5.  **Lucrați în perechi!** Să se traseze graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$; b) $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
6. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 - 2$. Să se reprezinte grafic funcția f , știind că:
- a) graficul trece prin punctul $(1, 1)$;
 b) în punctul $x = 1$ funcția f are un extrem local.
7. Costul unui lot de produse este de 240 de lei. Cheltuielile de fabricare sunt descrise de funcția definită prin formula $C(x) = 3x^2 + 6x + 120$, unde x este numărul unităților de produs. Să se determine beneficiul brut maxim.
- Indicație:* Beneficiul brut $B(x)$ se exprimă prin formula $B(x) = 240x - C(x)$.

B₁ 8. Să se arate că:

- a) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2\arctg x, & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ -2\arctg x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0]; \end{cases}$ b) $\arctg \frac{1+x}{1-x} = \arctg x + \frac{\pi}{4}, \quad x \in (-\infty, 1);$
 c) $2\arctg x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0, \quad x \in (-1; 1).$

9. Să se afle intervalele de monotonie și extremele locale și globale ale funcției:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x+1|;$ b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x^2};$
 c) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x.$

10.  **Lucrați în perechi!** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx - \ln(1+x^2)$, să fie descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

11. Să se determine intervalele de convexitate și concavitate ale funcției:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2;$ b) $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x;$
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1};$ d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + |x|.$

12. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2;$ b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 4x;$ d) $f: (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 1};$
 e) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\ln x - 1|;$ f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 4x|.$

13. Să se traseze graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $f(x) = \frac{x}{x+1};$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1};$ c) $f(x) = \frac{x^2}{3x-2};$
 d) $f(x) = \frac{x}{x-2};$ e) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1};$ f) $f(x) = \ln(x^2-4).$

14. Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$, are un maxim și un minim local.

15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface condițiile:

- a) f este derivabilă pe $\mathbb{R}$; b) există $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}^*$; c) există $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x).$

Să se arate că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$

Indicație. Aplicați regula lui l'Hospital pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x}.$

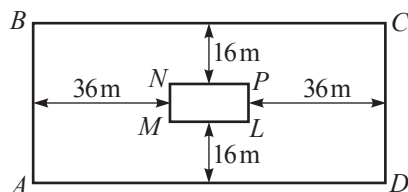
16.  **Investigați!** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{mx^2 - 1}{x - 1}, m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m , astfel încât:

- a) funcția să fie strict crescătoare pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, 1); (1, +\infty);$
 b) funcția să fie strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele specificate în a);
 c) funcția să admită puncte de extrem;
 d) graficul funcției să nu aibă asimptote.

C₁ 17.  **Lucrați în perechi!** Cheltuielile de fabricare (în lei) ale unui produs se descriu de funcția definită prin formula $C(x) = 1 + 76x$, iar cererea – de funcția definită prin formula $p(x) = -x^2 + 42x - 80, 2 \leq x \leq 40$. Să se determine numărul unităților de produs, x , care trebuie fabricate pentru a obține un beneficiu maxim, precum și valoarea acestui beneficiu.

18. (BAC, 2016) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^2x^4 + 2(a^2 - 1)x^2 + 3$. Determinați valorile reale ale parametrului a pentru care funcția f admite un singur punct de extrem local.

19. (BAC, 2008) Pentru construcția edificiului unui spital, fundamentul căruia are forma unui dreptunghi $MNKL$ cu aria de 400 m^2 , este necesar un lot de formă dreptunghiulară $ABCD$, astfel încât edificiul spitalului să fie situat la distanțele de 36 m și 16 m de la marginile lotului (vezi desenul). Determinați lungimea și lățimea fundamentului edificiului spitalului, astfel încât aria lotului $ABCD$ să fie minimă.



20.  **Lucrați în grup!** Proiect *Probleme de optimizare din viața cotidiană*.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilul real

- Determinați valoarea de adevăr a propoziției:
„Graficul funcției $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-2}$, nu are asimptote”. A / F ②
- Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.
1) Aflați: a) intervalele de monotonie; ③
b) punctele de extrem local; ③
c) extremele locale. ③
2) Completați tabloul de variație al funcției f . ③
- Determinați, pe intervalul $I = [-1, 2]$, extremele globale ale funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } -1 \leq x \leq 0 \\ 2 \ln x, & \text{dacă } 0 < x \leq 2. \end{cases}$ ⑥
- Trasați graficul funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$. ⑧
- Cunoscând funcția cererii $p(x) = 800 - 0,5x$ și funcția ofertei $p_1(x) = 700 + 2x$ (x – numărul unităților de produs), determinați mărimea impozitului pentru fiecare unitate de produs, astfel încât venitul din impozitare să fie maxim.
Indicație. Venitul din impozitare a x unități de produs se exprimă prin formula $V(x) = (p(x) - p_1(x))x$. ⑧

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–17	16–11	10–7	6–4	3–2	1–0

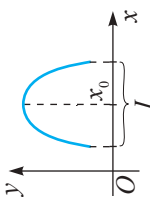
Aplicații ale derivatelor

Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, derivabilă pe I .

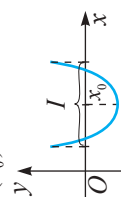
1. Dacă $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci $f(x)$ este constantă pe I .
2. Funcția f este **creșcătoare (descrescătoare)** pe I dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$), $\forall x \in I$.
3. Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este **punct de maxim local** al funcției f .

Se notează: $\nearrow f(x_0) \searrow$.



4. Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, și $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, atunci x_0 este **punct de minim local** al funcției f .

Se notează: $\searrow f(x_0) \nearrow$.

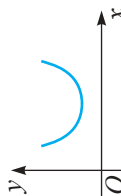


5. Punctele de maxim local și de minim local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.
6. Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt eventualele puncte de extrem local ale funcției f .

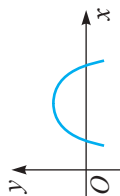
Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe I .

1. Dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este **convexă** pe I .

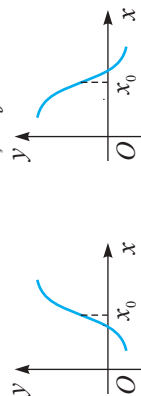


2. Dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția f este **concavă** pe I .



3. Fie $f''(x_0) = 0$ și $V(x_0)$ o vecinătate a punctului $x_0 \in I$.

Dacă $f''(x) < 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x) > 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$, sau invers ($f''(x) > 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x < x_0$, și $f''(x) < 0$, $\forall x \in V(x_0)$, $x > x_0$), atunci x_0 este punct de **inflexiune** al funcției f .



4. Soluțiile ecuației $f''(x) = 0$ sunt eventualele puncte de inflexiune ale funcției f .

Reprezentarea grafică a funcțiilor

Pentru trasarea grafică a funcțiilor se recomandă parcurgerea următoarelor elemente caracteristice ale funcției:

- I. Stabilirea domeniului maxim de definiție.
- II. Semnul funcției și eventuale simetrii ale graficului.
- III. Limitele la capetele intervalelor, continuitatea funcției, asimptote.
- IV. Derivata întâi, studiul monotoniei și determinarea eventualelor puncte de extrem.
- V. Derivata a doua, studiul concavității-convexității și determinarea eventualelor puncte de inflexiuni.
- VI. Tabloul de variație.
- VII. Trasarea graficului funcției.

Probleme de maxim și minim

Obiective

- ⇒ operarea cu numere reale și complexe pentru a efectua calcule în diverse contexte;
- ⇒ utilizarea numerelor complexe, a numerelor reale scrise sub diferite forme, a terminologiei aferente în diverse contexte;
- ⇒ utilizarea operațiilor cu numere complexe și numere reale, a proprietăților acestora în rezolvări de probleme;
- ⇒ aplicarea unor algoritmi specifici calculului cu numere complexe pentru rezolvarea ecuațiilor (de gradul II, *bipătrățice, *binome, *reciproce) în mulțimea $\mathbb{C}$;
- ⇒ *reprezentarea geometrică a numerelor complexe, a modulelor numerelor complexe și aplicarea acestor reprezentări în rezolvări de probleme;
- ⇒ *determinarea rădăcinilor de ordinul 2, 3 și 4 ale unui număr complex scris sub formă trigonometrică sau sub formă algebrică.

§1**Operații cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică**

Din cursul gimnazial de matematică se știe că ecuația de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, are soluții reale dacă și numai dacă discriminantul ei este nenegativ. Însă dacă discriminantul ei este negativ (de exemplu, discriminanții ecuațiilor $3x^2 - x + 4 = 0$,



Carl Friedrich Gauss

$x^2 + 1 = 0$), atunci ecuația nu are soluții reale, deoarece în $\mathbb{R}$ nu există rădăcini de ordinul doi ale unui număr negativ. Pentru ca să existe soluții ale tuturor ecuațiilor de acest tip, matematicienii din secolul al XVI-lea utilizează expresii de forma $\sqrt{-a}$, $a \in \mathbb{R}_+$. În secolul al XVIII-lea, L. Euler introduce notația $\sqrt{-1} = i$ (i de la cuvântul latin „imaginaris”). Astfel, mulțimea numerelor reale se extinde la mulțimea numerelor de forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, numite în secolul al XIX-lea de C. F. Gauss¹ *numere complexe*.

Definiție. Se numește **număr complex** expresia de forma $a + bi$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, iar i este un simbol cu proprietatea $i^2 = -1$.

¹ Carl Friedrich Gauss (1777–1855) – matematician, fizician și astronom german.

Vom nota mulțimea numerelor complexe cu $\mathbb{C}$, deci $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.
Prin urmare, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Dacă $z = a + bi$, atunci se spune că numărul complex z este scris sub **formă algebrică** (se admite și scrierea $z = a + ib$). Numărul a se numește **partea reală** a numărului $z = a + bi$ și se notează cu $\operatorname{Re} z$, iar b se numește **partea imaginară** a lui z și se notează cu $\operatorname{Im} z$.

Numerele complexe $z_1 = a + bi$ și $z_2 = c + di$ se consideră **egale** dacă și numai dacă $a = c$ și $b = d$. Numărul de forma $a + 0i$ se identifică cu numărul real a . Prin urmare, mulțimea numerelor reale este o submulțime a mulțimii numerelor complexe. Numărul de forma $0 + bi$, $b \neq 0$, se numește **pur imaginar** și se notează bi . Numărul complex $i = 0 + 1i$ se numește **unitate imaginară**, însă ea nu ține de efectuarea unor măsurări. Acest număr este o soluție în $\mathbb{C}$ a ecuației $x^2 + 1 = 0$ (ecuație care nu are soluții în $\mathbb{R}$).

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $2 + 3i + (x + yi) = 5 + 7i$.

Rezolvare:

$$2 + 3i + (x + yi) = 5 + 7i \Leftrightarrow (2 + x) + (3 + y)i = 5 + 7i.$$

Egalând părțile reale și respectiv cele imaginare, obținem: $\begin{cases} 2 + x = 5 \\ 3 + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$

Definim **operațiile de adunare, scădere și înmulțire** a numerelor complexe în modul următor:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i; \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i; \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Adunarea (scăderea) se efectuează adunând (scăzând) între ele părțile reale și respectiv părțile imaginare ale numerelor. Scăderea este operație inversă adunării.

Exemple

- $(2 + 3i) + (-3 + 7i) = [2 + (-3)] + (3 + 7)i = -1 + 10i;$
- $(2 + 3i) \cdot (-3 + 7i) = [2 \cdot (-3) - 3 \cdot 7] + [2 \cdot 7 + 3(-3)]i = -27 + 5i.$

Observație. Operațiile de adunare, scădere, înmulțire cu numere complexe se efectuează similar cu operațiile cu polinoame în nedeterminata i , considerând $i^2 = -1$.

Definiție. Se numește **conjugatul** numărului complex $z = a + bi$ numărul $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$. (Notația $\bar{z}$ se citește „ z bar”.)

Produsul $z \cdot \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, are o semnificație deosebită deoarece el este un număr real nenegativ: $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

Proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire a numerelor complexe (sunt aceleași ca și pentru numerele reale):

- 1° $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – adunarea este comutativă;
- 2° $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – adunarea este asociativă;
- 3° $0 = 0 + 0 \cdot i$ este elementul neutru pentru adunare;
- 4° $-z = -a - bi$ este opusul lui $z = a + bi$;
- 5° $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ – înmulțirea este comutativă;
- 6° $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ – înmulțirea este asociativă;
- 7° $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ – înmulțirea este distributivă față de adunare;
- 8° $1 = 1 + 0 \cdot i$ este elementul neutru pentru înmulțire;
- 9° $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ este inversul pentru $z = a + bi$, $z \neq 0$.

Expresia pentru z^{-1} se poate obține astfel:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Împărțirea numerelor complexe se poate defini ca operație inversă a înmulțirii: $z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$, $z_2 \neq 0$, însă, pentru a evita calcule complicate, este mai simplu să se procedeze astfel:

$$\begin{aligned} \text{dacă } z_1 = a + bi, z_2 = c + di, z_2 \neq 0, \text{ atunci } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(\overline{c + di})}{(c + di)(\overline{c + di})} = \\ &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \end{aligned}$$

Exemple

1. $\frac{7 + 3i}{5 - i} = \frac{(7 + 3i)(5 + i)}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{35 + 7i + 15i + 3i^2}{25 + 1} = \frac{35 - 3 + 22i}{26} = \frac{16}{13} + \frac{11}{13}i.$
2. $(1 + i)^{-1} = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

Definiție. Se numește **modulul numărului complex** $z = a + bi$ numărul real nenegativ $\sqrt{a^2 + b^2}$, notat $|a + bi|$ sau $|z|$. Deci, $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple

Pentru $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = i$, obținem $|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $|z_2| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

Teorema 1. Pentru orice numere complexe z, z_1, z_2 sunt adevărate egalitățile:

- 1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; 2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; 3° $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$ (deci și $\bar{z}_2 \neq 0$);
- 4° $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$; 5° $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$; 6° $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$; 7° $\bar{\bar{z}} = z$.

Exercițiu. Arătați că, fiind date numerele $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ecuațiile $z_1 \cdot u = z_2$ ($z_1 \neq 0$) și $z_1 + t = z_2$ au soluții unice.

Observație. Datorită faptului că operațiile cu numere complexe au aceleași proprietăți ca și operațiile respective cu numere reale, pentru numerele complexe pot fi aplicate formulele cunoscute pentru calculul prescurtat; noțiunea de putere cu exponent întreg a numărului complex nenul z : $z^0 = 1$, $z^k = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{k \text{ ori}}$, $z^{-k} = (z^{-1})^k$, $k \in \mathbb{N}^*$; proprietățile acestei puteri: $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$, $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$, $z \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Astfel: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

De asemenea, pot fi aplicate formulele $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

pentru calculul soluțiilor ecuației de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Menționăm că orice ecuație de gradul II are soluții în mulțimea $\mathbb{C}$, deoarece pentru orice număr complex z există un număr complex u , astfel încât $u^2 = z$ (acest fapt va fi demonstrat mai jos).

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze: $A = (2 + 3i)^3 - \frac{7 + 3i}{5 - i}$.

Rezolvare:

Aplicând formula cubului sumei și rezultatul obținut anterior pentru $\frac{7 + 3i}{5 - i}$, obținem:

$$\begin{aligned} A &= 8 + 3 \cdot 4 \cdot 3i + 3 \cdot 2 \cdot (3i)^2 + (3i)^3 - \left(\frac{16}{13} + \frac{11}{13}i \right) = 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 - \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i = \\ &= 8 - 54 - \frac{16}{13} + \left(36 - 27 - \frac{11}{13} \right)i = -\frac{614}{13} + \frac{106}{13}i. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze:

a) i^{73} ; b) i^{24k+3} , $k \in \mathbb{N}$; c) $(7 - 3i)^{-1}$.

Rezolvare:

a) $i^{73} = i^{72+1} = (i^4)^{18} \cdot i = 1^{18} \cdot i = i$.

b) $i^{24k+3} = (i^4)^{6k} \cdot i^3 = 1^{6k} \cdot (-i) = -i$.

c) $(7 - 3i)^{-1} = \frac{1}{7 - 3i} = \frac{7 + 3i}{(7 - 3i)(7 + 3i)} = \frac{7 + 3i}{49 + 9} = \frac{7}{58} + \frac{3}{58}i$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

a) $(2 + i)z - (3 + 6i)z = 5 + 2i$; b) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Rezolvare:

a) Folosind proprietățile operațiilor cu numere complexe, obținem:

$$(2 + i - 3 - 6i)z = 5 + 2i \Leftrightarrow (-1 - 5i)z = 5 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{5 + 2i}{-1 - 5i} = -\frac{15}{26} + \frac{23}{26}i$$

Răspuns: $S = \left\{ -\frac{15}{26} + \frac{23}{26}i \right\}$.

$$b) \Delta = 4 - 12 = -8 = (i\sqrt{8})^2 = (2\sqrt{2}i)^2.$$

$$\text{Astfel, soluțiile sunt } z_1 = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1+i\sqrt{2}, \quad z_2 = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1-i\sqrt{2}.$$

$$\text{Răspuns: } S = \{1-i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{2}\}.$$

Exerciții propuse

Profilurile umanist, arte, sport

A 1. Să se calculeze:

a) $(2+3i)+(1-i)$;	b) $4+3i-(2+5i)$;	c) $(\sqrt{3}+i)+(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$;
d) $(1+3i)(2-4i)$;	e) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$;	f) $(2+i):(3+2i)$;
g) $(3+i)^{-1}$;	h) $\frac{2+4i}{1+i}+22-23i$;	i) $(1+i)(1+i)^2$.

2. 1) Să se calculeze: a) i^5 ; b) i^6 ; c) i^{16} ; d) i^{131} ; e) i^{2020} .

2) Pentru care exponent număr natural puterea i^k este un număr real?

B 3. Să se determine numerele reale x și y , astfel încât:

a) $(1+3i)x+(2+5i)y=7+i$;	b) $(2+5i)x+(1+i)y=i$;
c) $i \cdot x+i((1+i)x-(3+i)y)=3+2i$;	d) $7i \cdot x+(\sqrt{3}-i)(x-iy)=4+3i$.

4. 1) Care dintre ecuații au soluții numere reale?

a) $2z^2+3z+3=0$;	b) $\bar{z}^2+\bar{z}+1=0$;	c) $z^2-z+4=0$;
d) $\sqrt{2}z^2+z+1=-2z$;	e) $2z^2+z-2=3z+7$;	f) $\frac{2-z}{3+z}=\frac{4z+1}{5-z}$;
g) $(3-z)(4+z)=(2+z)z+7$;	h) $z^2+2z+2=0$;	i) $z+2=\frac{3-z}{z+1}$.

2) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile din 4.1).

5. Să se calculeze: a) $(2+i)^3-(2-i)^3$; b) $(3-i)^3+(3+i)^3$.

C 6. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

a) $(1+i)z=3+i$;	b) $3z \cdot i+(5+2i)z=3z+2-i$;
c) $\frac{z}{2+i}+7+i=z(1+i)$;	d*) (BAC, 2018) $3+i\bar{z}=2z$.

7. Să se rezolve sistemul de ecuații ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

a) $\begin{cases} 2z_1-(3+3i)z_2=3-i, \\ (-1+i)z_1+3iz_2=i; \end{cases}$	b) $\begin{cases} -2z_1+(2+i)z_2=i, \\ (4+2i)z_1-5z_2=-1-2i. \end{cases}$

8.  **Lucrați în perechi!** Să se determine numerele complexe z care satisfac condițiile:

a) $\operatorname{Re} z = -1, z = \sqrt{2}$;	b) $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2, \bar{z} = 1$;	c) $\operatorname{Im} z = 3, z+i = 2$.

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze:

a) $(-2+3i)+(1-i)$;	b) $4+3i-(-2+5i)$;	c) $(\sqrt{3}-i)+(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$;
d) $(1-3i)(2-4i)$;	e) $(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}-i\sqrt{3})$;	f) $(2+i):(3+4i)$;
g) $(3-i)^{-1}$;	h) $\frac{2+4i}{1-i}+22-23i$;	i) $(1-i)(1+i)^2$.

2. 1) Să se calculeze: a) i^3 ; b) i^4 ; c) i^{24} ; d) i^{131} ; e) i^{2010} .

2) Pentru care exponent număr întreg puterea i^k este un număr real?

3. Să se determine numerele reale x și y , astfel încât:

a) $(1+3i)x + (2-5i)y = 7+i$; b) $(2+5i)x - (1+i)y = i$;
c) $i \cdot x + i((i+1)x - (3-i)y) = 3+2i$; d) $7i \cdot x + (\sqrt{3}-i)(x-iy) = 4-3i$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

a) $2z^2 - 3z + 3 = 0$; b) $\bar{z}^2 - \bar{z} - 1 = 0$; c) $z^2 + z + 4 = 0$;
d) $\sqrt{2}z^2 - z + 1 = -2z$; e) $2z^2 + z - 2 = 3z - 7$; f) $\frac{2-z}{3+z} = \frac{-4z+1}{5-z}$;
g) $(3-z)(-4+z) = (2+z)z + 7$; h) $z^2 - 2z + 2 = 0$; i) $z + 2 = \frac{-3-z}{z+1}$.

5. Să se calculeze:

a) $(2+i)^3 + (2-i)^3$; b) $(3-i)^3 - (3+i)^3$.

6. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

a) $(1-i)z = 3+i$; b) $3z \cdot i + (5-2i)z = 3z + 2-i$;
c) $\frac{z}{2+i} - 7+i = z(1+i)$; d*) $|z| - iz = 1-2i$.

B₁ 7. Să se rezolve sistemul de ecuații ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

a) $\begin{cases} 2z_1 - (3+3i)z_2 = 3-i, \\ (1-i)z_1 - 3iz_2 = -i; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4+2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i. \end{cases}$

8.  **Lucrați în perechi!** Să se determine numerele complexe z care satisfac condițiile:

a) $\operatorname{Re} z = 1, |z| = \sqrt{2}$; b) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 2, |\bar{z}| = 1$; c) $\operatorname{Im} z = 3, |z-i| = 2$.

9. Să se calculeze:

a) $(3+2i)(-2+3i)^{-1} \cdot (-i) + 1$; b) $(2+i)(5+i)^{-1} - (7+5i)^2 \cdot (3-i)^{-1}$.

10. Să se calculeze:

a) $(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$;
b) $(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)$;
c) $(b\varepsilon^2 + a\varepsilon)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon)$, dacă $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

11. Să se arate că următoarele numere sunt reale:

a) $\frac{1}{i}(z-\bar{z})$; b) $\frac{z-1}{i(z+1)}$, dacă $z \cdot \bar{z} = 1$.

C₁ 12. Să se demonstreze egalitatea:

a) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$, $n \in \mathbb{Z}$; b) $(1+i)^{4n} = (-1)^n \cdot 2^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

13. Să se determine numărul complex z , astfel încât $|z+i| = |z+1| = |z+iz|$.

14.  **Investigați!** a) Poate fi câtul a 2 numere complexe diferite un număr real?

b) Dar câtul dintre un număr complex pur imaginari și un număr real poate fi real?

c) Fie $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\alpha - (\alpha+1)i}$. Să se determine numerele $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $z \in \mathbb{R}$.

15. Să se arate că $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

§2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe.

Forma trigonometrică a unui număr complex

Interpretarea geometrică a numerelor complexe, propusă de C. F. Gauss la începutul secolului al XIX-lea, a făcut posibil ca ele să fie aplicate în diverse domenii.

Fixăm în plan un sistem de axe ortogonale. Oricărui număr complex $z = x + iy$ i se asociază în acest plan punctul $M(x, y)$, și invers. Punctul M se numește **imaginea** numărului z , iar z se numește **afixul** punctului M (fig. 6.1). Astfel se stabilește o bijecție între mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ și mulțimea punctelor din plan, ceea ce permite să identificăm numărul complex $z = x + iy$ cu punctul $M(x, y)$. În baza acestei convenții (identificări) vom putea spune „punctul $z = x + iy$ ” în loc de „numărul complex z ”, iar planul respectiv îl vom numi **plan complex**. În plus, observăm că mulțimea numerelor reale se reprezintă prin punctele axei Ox , pe care o vom numi **axă reală**, iar mulțimea numerelor pur imaginare – prin punctele axei Oy , pe care o vom numi **axă imaginară**.

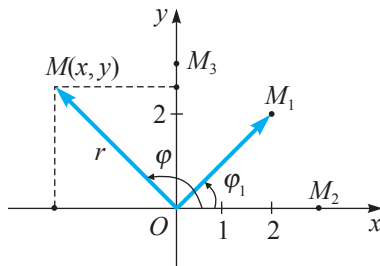


Fig. 6.1

Exemplu

Numerele $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 3$, $z_3 = 3i$ sunt reprezentate de punctele $M_1(2, 2)$, $M_2(3, 0)$ și respectiv $M_3(0, 3)$ (fig. 6.1).

Numerele complexe pot fi reprezentate geometric și prin vectori dintr-un plan dotat cu un sistem de axe ortogonale. Anume numărul complex $z = x + iy$ se identifică cu vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde O este originea sistemului de coordonate, iar $M(x, y)$ este imaginea numărului z (fig. 6.1). Evident, $|z| = |\overrightarrow{OM}|$. Astfel, suma numerelor complexe $t_1 = a + bi$, $t_2 = c + di$ (afixele punctelor $A_1(a, b)$, $A_2(c, d)$) poate fi realizată ca suma vectorilor $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, întrucât coordonatele punctului A_3 , unde $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, sunt $a + c$ și $b + d$ (fig. 6.2).

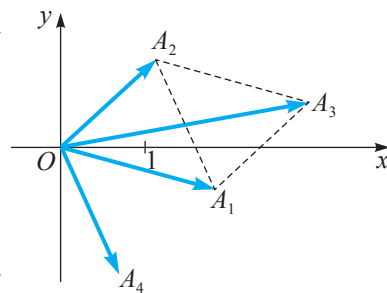


Fig. 6.2

Diferența $t_1 - t_2$ se identifică cu vectorul $\overrightarrow{OA_4}$, unde $\overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}$ (fig. 6.2).

Deci, $|t_1 - t_2| = |A_2A_1|$, adică **distanța dintre punctele A_1 și A_2 este egală cu modulul diferenței $t_1 - t_2$.**

Proprietățile modulului numărului complex sunt date de

Teorema 2. Pentru orice $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$1^\circ |z| = |\bar{z}| = |-z|;$$

$$2^\circ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$3^\circ \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2|;$$

$$4^\circ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$5^\circ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0;$$

$$6^\circ \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$$

Demonstrație

Proprietatea 1° se obține din definiția numărului conjugat și din definiția modulului. Proprietățile 2°, 3°, 6° rezultă din relația dintre lungimile laturilor unui triunghi, care pot fi $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$, sau, dacă vectorii sunt coliniari, din regulile de adunare a acestora. Proprietățile 4°, 5° vor fi demonstrate mai jos. ►

Spre deosebire de adunarea și scăderea numerelor complexe, operațiile de înmulțire și împărțire nu pot fi ilustrate simplu, prin efectuarea unor operații cu vectorii respectivi.

În continuare vom expune reprezentarea numerelor complexe sub formă trigonometrică, care facilitează efectuarea operațiilor de înmulțire, împărțire, ridicare la putere a numerelor complexe.

Reamintim că modulul numărului complex $z = x + iy$ este $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$.

Prin **argument** al numărului complex $z = x + iy$, $z \neq 0$, vom înțelege mărimea unghiului format de vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde O este originea sistemului de coordonate, iar $M(x, y)$ este imaginea numărului z , și de semiaxa pozitivă Ox . Unui număr complex z , $z \neq 0$, îi corespunde o mulțime infinită de valori ale argumentului, care diferă între ele prin $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Menționăm că **argumentul numărului complex 0 nu este definit**. Există un unic argument φ al numărului dat $z = x + iy$, care satisface condiția $-\pi < \varphi \leq \pi$. Acesta se numește **argument principal** (sau **redus**) și se notează **arg** z . Orice argument al numărului z se notează $\text{Arg } z$ și deci se poate scrie: $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observație. În unele manuale se folosește notația $\text{Arg } z = \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, iar condiția $\arg z \in (-\pi, \pi]$ se înlocuiește cu $\arg z \in [0, 2\pi)$.

Exemplu

Numărul $z_1 = 2 + 2i$ are modulul $|z_1| = OM_1 = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ și argumentul principal $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, iar valori ale $\text{Arg } z_1$ sunt $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$ sau orice număr de forma $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Evident, pentru $z = a + bi$, $b \neq 0$, avem $\arg \bar{z} = -\arg z$. Argumentul principal al numărului $z = a + bi$, $z \neq 0$, poate fi determinat cu ajutorul funcției arccos:

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{a}{r}, & \text{dacă } b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{r}, & \text{dacă } b < 0, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Exemple

1. $\arg(2 - 2i) = -\arccos \frac{2}{2\sqrt{2}} = -\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$;
2. $\arg(-2 + 3i) = \arccos \frac{-2}{\sqrt{13}}$.

Fie $z = x + iy$, $z \neq 0$, un număr complex arbitrar, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – modulul lui, φ – un argument al său. Folosind definițiile funcțiilor $\sin$ și $\cos$ ale unui unghi arbitrar, obținem relațiile: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Atunci

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Expresia $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ se numește **forma trigonometrică** a numărului complex z .

Întrucât argumentul numărului complex se determină neunivoc, pentru numerele complexe scrise sub formă trigonometrică avem:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (2)$$

Exercițiu rezolvat

☞ Să se scrie sub formă trigonometrică numerele:

$$\text{a) } z_1 = 1 + i; \quad \text{b) } z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{c) } z_3 = -1; \quad \text{d) } z_4 = 2 - 3i.$$

Rezolvare:

a) Calculăm modulul și un argument al lui z_1 :

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \text{ iar } \arg z_1 = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Astfel, $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ (expresia din membrul drept este forma trigonometrică a numărului z_1).

$$\text{b) Analog, } |z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \text{ iar conform (1) obținem } \arg z_2 = \arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Prin urmare, } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{c) Pentru } z_3 \text{ obținem: } |z_3| = 1, \arg z_3 = \arccos(-1) = \pi, \text{ deci } -1 = \cos \pi + i \sin \pi.$$

$$\text{d) Pentru } z_4 = 2 - 3i \text{ avem: } |z_4| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}, \arg z_4 = -\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

$$\text{Așadar, } 2 - 3i = \sqrt{13} \left[\cos \left(-\arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right) + i \sin \left(-\arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \right].$$

Observație. Forme trigonometrice pentru numerele complexe z_1, z_2, z_3 considerate anterior sunt (cu alte valori ale argumentului) de asemenea:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right), z_2 = \cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{3} \right), z_3 = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi),$$

însă, de regulă, în forma trigonometrică se indică argumentul principal al numărului complex.

Teorema ce urmează determină formulele pentru calculul produsului, câtului, puterii cu exponent întreg a numerelor complexe reprezentate sub formă trigonometrică.

Teorema 3. Dacă $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}^*$, $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, atunci:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \quad (4)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{formula lui Moivre}^1). \quad (5)$$



Abraham de Moivre

Demonstrație

Pentru formula (3) avem:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Similar se obține formula (4) pentru câtul numerelor.

Formula (5) pentru $n \in \mathbb{N}$ se demonstrează prin metoda inducției matematice.

Pentru $n = -k$, $k \in \mathbb{N}^*$, formula (5) se verifică astfel:

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-k} = \frac{1}{z^k} = \frac{1(\cos 0 + i \sin 0)}{r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)} = r^{-k} (\cos(0 - k\varphi) + i \sin(0 - k\varphi)) = \\ &= r^{-k} (\cos(-k\varphi) + i \sin(-k\varphi)) = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Observații. 1. Din (3) și (4) rezultă respectiv proprietățile 4° și 5° ale modulului numărului complex, menționate în teorema 2.

2. Din relațiile (3)–(5), respectiv, rezultă: argumentul produsului este egal cu suma argumentelor factorilor; argumentul câtului este egal cu diferența dintre argumentul deîmpărțitului și argumentul împărțitorului; argumentul puterii z^n este egal cu produsul dintre exponentul întreg n al puterii și un argument al bazei z . De menționat că aici egalitățile au loc cu exactitatea unui termen multiplu al lui 2π .

Exercițiu rezolvat

☞ Să se calculeze $A = \frac{2(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(-\sqrt{3}+i)^{30}}$.

Rezolvare:

Pentru a efectua calculele, este comod să scriem numerele sub formă trigonometrică:

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1-i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right), \\ -\sqrt{3}+i &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

¹ Abraham de Moivre (1667–1754) – matematician englez de origine franceză.

Folosind formulele (3) – (5), obținem:

$$A = \frac{4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]}{\left[2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \right]^{30}} = \frac{4\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]}{2^{30} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} \cdot 30 \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \cdot 30 \right) \right]} =$$

$$= \frac{2^{-\frac{55}{2}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]}{\cos 25\pi + i \sin 25\pi} = -2^{-\frac{55}{2}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] = 2^{-\frac{55}{2}} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

Se știe că rădăcina de ordinul n a numărului real a (în caz că există) este un număr real b , astfel încât $b^n = a$. Acest concept se generalizează pentru numerele complexe.

Definiție. Numărul complex u se numește **rădăcină de ordinul n** , $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, a numărului z dacă $u^n = z$.

Exemple

Rădăcini de ordinul 3 ale numărului 1 sunt 1 , $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, deoarece $1^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = 1$, iar rădăcini de ordinul doi ale numărului 1 sunt ± 1 .

Dacă numărul complex este scris sub formă trigonometrică, atunci rădăcinile lui de ordinul n se determină relativ ușor.

Observație. Dacă n parcurge toate valorile din mulțimea $\{k, k+1, \dots, m\}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $k < m$, atunci vom nota $n = \overline{k, m}$.

Teorema 4. Există n rădăcini distincte de ordinul n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ale oricărui număr complex nenul z . Anume dacă $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, atunci mulțimea tuturor rădăcinilor de ordinul n ale lui z este

$$\left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \mid k = \overline{0, n-1} \right\}. \quad (6)$$

Demonstrație

Fie $u = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ o rădăcină de ordinul n a lui z , adică $u^n = z$, ρ și ψ rămânând a fi determinate.

În baza formulei lui Moivre, avem $\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, iar din (2) obținem $\rho^n = r$ și $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Din prima relație avem $\rho = \sqrt[n]{r}$ (amintim că $r \in \mathbb{R}_+^*$, deci $\sqrt[n]{r}$ este un număr real pozitiv unic determinat), iar din a doua obținem $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru

$k=0, n-1$ se obțin n valori distincte pentru u :

$$u_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right],$$

deoarece aceste numere se reprezintă (verificați!) în planul complex prin vârfurile unui poligon regulat cu n laturi (dacă $n \geq 3$), înscris în cercul de centru O (originea sistemului de coordonate) și rază $\sqrt[n]{|z|}$.

Se poate arăta că orice u_k , $k \in \mathbb{Z}$, este egal cu un oarecare u_t , unde $0 \leq t \leq n-1$. Astfel se obțin exact n rădăcini distincte de ordinul n ale lui z , $z \neq 0$. ►

Observații. 1. Argumentele numerelor din (6) nu sunt neapărat argumentele principale ale acestora.

2. În continuare vom calcula doar rădăcinile de ordinul 2, 3, 4.

Exerciții rezolvate

❧ **1.** Utilizând teorema 4, să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului -4 .

Rezolvare:

Scriem numărul -4 sub formă trigonometrică: $-4 = 4 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$.

Din (6) obținem:

$$u_0 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i, \quad u_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi+2\pi}{2} + i \sin \frac{\pi+2\pi}{2} \right) = -2i.$$

Așadar, rădăcinile de ordinul doi ale numărului -4 sunt $\pm 2i$.

❧ **2.** Să se determine și să se illustreze geometric rădăcinile de ordinul trei ale numărului $2i$.

Rezolvare:

Deoarece $2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, din (6) obținem:

$$u_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$u_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$u_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} \right) = -\sqrt[3]{2} \cdot i.$$

Aceste numere se reprezintă geometric prin vârfurile unui triunghi echilateral (fig. 6.3, a)).

3. Să se determine rădăcinile de ordinul patru ale numărului 1.

Rezolvare:

Pentru rădăcinile de ordinul n ale numărului 1 obținem:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, n-1.$$

În figura 6.3 b) sunt reprezentate geometric rădăcinile de ordinul patru ale numărului 1: $\{\pm 1, \pm i\}$.

Rădăcinile de ordinul doi, α_1, α_2 , ale numărului complex nenul $a + bi$ sunt numere opuse și pot fi determinate fără a utiliza forma trigonometrică a acestuia:

$$1) \text{ pentru } b \neq 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right);$$

$$2) \text{ pentru } b = 0, \quad \alpha_{1,2} = \begin{cases} \pm \sqrt{a}, & \text{dacă } a \geq 0 \\ \pm i\sqrt{|a|}, & \text{dacă } a < 0, \end{cases} \quad \text{unde } \operatorname{sgn} b = \begin{cases} 1, & \text{dacă } b > 0 \\ 0, & \text{dacă } b = 0 \\ -1, & \text{dacă } b < 0. \end{cases}$$

Exerciții rezolvate

1. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului $40 - 42i$.

Rezolvare:

$$\text{Cum } b = -42 < 0, \text{ obținem } \alpha_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2 + 42^2} + 40)} - i \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{40^2 + 42^2} - 40)} \right).$$

Deci, $\{-7 + 3i, 7 - 3i\}$ este mulțimea rădăcinilor de ordinul doi ale numărului $40 - 42i$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.

Rezolvare:

Aplicăm formulele cunoscute pentru determinarea soluțiilor ecuației de gradul II. Discriminantul este $-3 + 4i$, iar rădăcinile de ordinul doi ale numărului complex $-3 + 4i$ sunt $1 + 2i$ și $-1 - 2i$.

$$\text{Deci, soluțiile ecuației sunt: } z_1 = \frac{3 + (1 + 2i)}{2}, \quad z_2 = \frac{3 - (1 + 2i)}{2}.$$

Răspuns: $S = \{2 + i, 1 - i\}$.

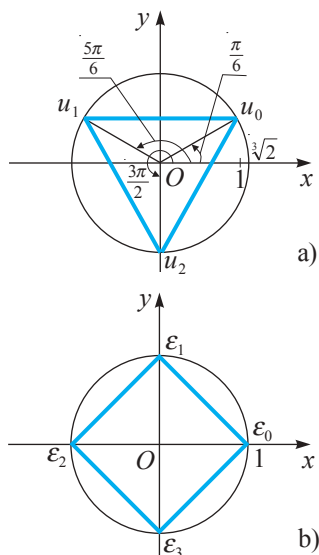


Fig. 6.3

Exerciții propuse

Profilul real

- A₁** 1. a) În planul complex construieți imaginile numerelor:
 $-1, i, 1-i, -5i, 3, -3+i, -1-2i, 1-i\sqrt{2}, \sqrt{2}-i$.
 b) Imaginile căror numere aparțin axei Ox ? Imaginile căror numere aparțin axei Oy ?
 c) La ce distanță de origine se află imaginea lui z ?
 2. Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului:
- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| a) $-2i$; | b) $-5-12i$; | c) $48+14i$; |
| d) $2-2\sqrt{3}i$; | e) $1-2i\sqrt{6}$; | f) $-1+2i\sqrt{6}$. |

- B₁** 3. 1) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:
- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $z^2 + 4z + 4 - 2i = 0$; | b) $i \cdot z^2 - (4+i)z + 6 + 12i = 0$; |
| c) $z^2 + (3-2i)z - 1 - 3i = 0$; | d) $(1+i)z^2 + (2+i)z - 7 - i = 0$; |
| e) $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$; | f) $z^2 - (48+14i) = 0$. |
- 2) Poate avea ecuația de gradul doi cu coeficienți complecși (nereali) soluții reale?
 4.  **Lucrați în perechi!** Fie $\alpha + \beta i$ și $-\alpha - \beta i$ rădăcinile de ordinul doi ale numărului z . Să se determine rădăcinile de ordinul doi ale numărului $-z$.
 5. Să se reprezinte sub formă trigonometrică numărul:
- | | | |
|-------------|---|--|
| a) -5 ; | b) $-3i$; | c) $1-i\sqrt{3}$; |
| d) $2-2i$; | e) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; | f) $-4\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$; |
| g) $3+4i$; | h) $\sin\varphi - i\cos\varphi$; | i) $\left(\frac{1}{i-1}\right)^{100}$. |

- C₁** 6. Să se calculeze:

a)
$$\frac{\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)}{\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}};$$

b) $(1+i\sqrt{3})^3 \cdot \overline{(1+i)^7};$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}.$

7. Să se determine rădăcinile:
- de ordinul trei ale numărului i ;
 - de ordinul trei ale numărului -27 ;
 - de ordinul patru ale numărului $2-2i\sqrt{3}$;
 - de ordinul patru ale numărului -1 .
8. Să se determine numerele complexe z care satisfac condițiile:
- $\operatorname{Im} z \geq 1, |z| \leq 1$;
 - $\operatorname{Re}(iz) = 1, |z+i| = 2$.
9. (BAC, 2019) Determinați valorile reale ale p, q pentru care $2+i$ este soluție a ecuației $x^2 + px + q = 0$.

§3 Aplicații ale numerelor complexe

3.1. Rezolvarea ecuațiilor de forma $mz^k + p = 0$, $m \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$

Definiție. Ecuațiile de forma $mz^k + p = 0$, $m \in \mathbb{C}^*$, $p \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$, se numesc **ecuații binome**.

Ecuația binomă $mz^k + p = 0$ este echivalentă cu ecuația $z^k = -\frac{p}{m}$. De aceea, pentru a o rezolva, determinăm toate rădăcinile de ordinul k , $k \geq 2$, ale numărului $-\frac{p}{m}$.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $2z^4 = 1 + i\sqrt{3}$.

Rezolvare:

$2z^4 = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru a determina rădăcinile de ordinul 4 ale numărului complex $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, îl scriem sub formă trigonometrică: $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

Aplicând (6) din § 2, obținem:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}; \quad z_1 = \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12};$$

$$z_2 = \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}; \quad z_3 = \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}.$$

Răspuns:

$$S = \left\{ \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}, \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}, \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}, \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right\}.$$

3.2. Rezolvarea ecuațiilor bipătraticice $mz^4 + pz^2 + q = 0$, $m \in \mathbb{C}^*$, $p, q \in \mathbb{C}$

Definiție. Ecuațiile de forma $mz^4 + pz^2 + q = 0$, $m \in \mathbb{C}^*$, $p, q \in \mathbb{C}$, se numesc **ecuații bipătraticice**.

Prin substituția $z^2 = u$, ecuația bipătratică se reduce la sistemul $\begin{cases} mu^2 + pu + q = 0, \\ z^2 = u. \end{cases}$

Exercițiu rezolvat

☞ Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $z^4 - 3z^2 + 3 - i = 0$.

Rezolvare:

Notăm $z^2 = u$ și obținem ecuația $u^2 - 3u + 3 - i = 0$. Aplicăm formulele din § 2 și obținem $u_1 = 2 + i$, $u_2 = 1 - i$. Pentru z avem două cazuri: $z^2 = 2 + i$ și $z^2 = 1 - i$.

Soluțiile primei ecuații sunt $z_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{4+1}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{4+1}-2}{2}} \right) = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \right)$.

Soluțiile ecuației a doua se determină cu ajutorul formulei (6) din § 2, unde

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

$$\text{Obținem } z_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right), \quad z_4 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right).$$

Răspuns:

$$S = \left\{ \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} \right); \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right); \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right) \right\}.$$

3.3. Rezolvarea ecuațiilor reciproce

Vom examina ecuații de forma $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, care sunt **ecuații reciproce** de gradul trei și respectiv patru.

Exemplu

Ecuația $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ este ecuație reciprocă de gradul patru.

La rezolvarea acestor ecuații se va ține cont de următoarele *proprietăți*:

1° Ecuația $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ are soluție numărul $x_0 = -1$.

2° Prin substituția $y = x + \frac{1}{x}$, ecuația $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ se reduce la un sistem format dintr-o ecuație de gradul II în y și o totalitate de două ecuații de gradul II în x .

Exercițiu rezolvat

☞ Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

Rezolvare:

Se observă că $x = 0$ nu este soluție, de aceea, împărțind la x^2 , obținem ecuația

$$\text{echivalentă: } x^2 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 4 = 0.$$

Notăm $y = x + \frac{1}{x}$, atunci $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = y^2 - 2$ și obținem ecuația

$$y^2 - 3y + 2 = 0, \text{ cu soluțiile } y_1 = 1, y_2 = 2. \text{ Revenind la necunoscuta } x, \text{ avem: } \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1, \\ x + \frac{1}{x} = 2. \end{cases}$$

Astfel, obținem următoarea totalitate de ecuații de gradul II: $\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases}$

Deci, soluțiile ecuației inițiale sunt $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ 1, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

3.4. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

Numerele complexe pot fi aplicate în acele domenii în care sunt examinate mărimi vectoriale. În acest caz, operațiile asupra vectorilor, care se efectuează, de obicei, sub formă geometrică, se înlocuiesc cu operațiile respective cu numere complexe reprezentate sub formă algebrică sau trigonometrică, care se efectuează mai ușor.

Pentru comoditate, în continuare vom nota cu $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, ... afixele punctelor M , M_0 , M_1 , M_2 , ..., respectiv.

a) Ecuația cercului de centru M_0 și rază r este $|z - z_0| = r$, sau $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Într-adevăr, $M \in \mathcal{C}(M_0, r)$ dacă și numai dacă $|\overrightarrow{MM_0}| = r$, adică $|z - z_0| = r$.

b) Inecuația ce determină discul de centru M_0 și rază r este $|z - z_0| \leq r$.

c) Inecuația ce determină inelul cuprins între cercurile concentrice $\mathcal{C}(M_0, r_1)$ și $\mathcal{C}(M_0, r_2)$, $r_1 < r_2$, este $r_1 < |z - z_0| < r_2$ (fig. 6.4).

d) Măsura unghiului $M_1 M_2 M_3$ admite reprezentarea $m(\angle M_1 M_2 M_3) = \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + 2\pi k$, pentru un oarecare $k \in \mathbb{Z}$.

Formula se obține din proprietatea

$$\arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \arg(z_3 - z_2) - \arg(z_1 - z_2) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(fig. 6.5).

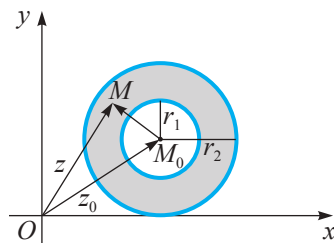


Fig. 6.4

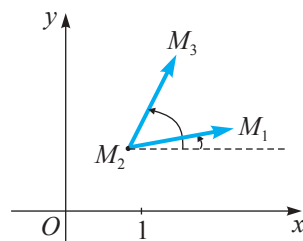


Fig. 6.5

Exerciții rezolvate

1. Să se scrie ecuația cercului de centru $M_0(1, -2)$ și rază 3.

Rezolvare:

Punctul M_0 este imaginea numărului $z_0 = 1 - 2i$, deci $M \in \mathcal{C}(M_0, 3)$ dacă și numai dacă $|z - (1 - 2i)| = 3$, unde $z = x + iy$ este afixul lui $M(x, y)$. Aplicând formula modulului numărului complex, obținem: $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Să se reprezinte în sistemul de axe ortogonale xOy locul geometric al punctelor $M(x, y)$ ale căror afixe $z = x + iy$ satisfac condiția $|z - 1 + i| \leq 3$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} |z - 1 + i| \leq 3 &\Leftrightarrow |x + iy - 1 + i| \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1) \cdot i| \leq 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 9 = 3^2. \end{aligned}$$

Se obține discul de centru $A(1, -1)$ și rază 3 (fig. 6.6).

3. Să se decidă dacă imaginea numărului $z = 1 + i$ aparține domeniului determinat de inecuația dublă $2 \leq |z - 1 + i| \leq 3$.

Rezolvare:

Prin substituție în inecuație, ne convingem că $M(1, 1)$ aparține inelului cuprins între cercurile de centru $A(1, -1)$ și rază 2, respectiv 3.

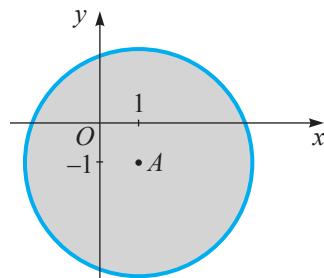


Fig. 6.6

Exerciții propuse

Profilul real

- A₁ 1. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

a) $(1-i)z^4 = 1-i\sqrt{3}$; b) $(1+i\sqrt{3})z^3 = 1+i$; c) $z^4 - 7z^2 + 6 = 0$;
d) $z^4 + z^2 - 2 = 0$; e) $z^4 + z^2 - 6 = 0$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$.

- B₁ 3. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $(z+1)^4 = (z-1)^4$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația reciprocă:

a) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$; b) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$; c) $x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$.

- C₁ 5. **Lucrați în perechi!** Să se arate că soluțiile ecuației $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$ sunt numere reale.

6. a) Să se calculeze $a = \frac{5}{1-2i} - (1-i)(2-i)$. b) Să se determine $|a|$.

- c) Să se determine dacă imaginea lui a aparține cercului de centru $A(1, -1)$ și rază 3.

7. **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale numerelor complexe în știință și tehnică*.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport

- A 1. Să se calculeze:

a) $(2+3i) + (-1-i)$; b) $(4+3i) - (2+5i)$; c) $(1-3i) \cdot (2-4i)$;
d) $(2+i) : (3+4i)$; e) i^3 ; f) $(-i)^4$; g) $(-i)^{13}$.

2. **Lucrați în perechi!** Să se arate că numărul este real:

a) $(1+i)^{24}$; b) $\left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}\right)^2$; c) $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$.

3. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

a) $z^2 = -4$; b) $z\bar{z} + 2(z - \bar{z}) = 25 + 12i$; c) $2z^2 + 2z + 1 = 0$.

- B 4. Să se calculeze modulul numărului $z = \left(\frac{8+i}{7-4i}\right)^{-1}$.

5. Fie $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$. Să se calculeze: a) $\bar{z}_1 \cdot z_2$; b) $(z_1 : z_2)^2$.

- C** 6. Să se calculeze: a) $(1+i)(2+i) + \frac{5}{1+2i}$; b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} - (1-i)^{12}$;
c) $\frac{(1+2i)^3 - (1-2i)^3}{(2-i)^2 - (2+i)^2}$; d) $\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$.

7. Să se determine $z = x + iy$, dacă $2z = |z| - 2i$.

Profilul real

A₁ 1. Să se calculeze:

- a) $(2-3i) + (-1+i)$; b) $(4-3i) - (2-5i)$; c) $(1+3i) \cdot (2+4i)$;
d) $(2-i) : (3-4i)$; e) $(-i)^3$; f) $(-i)^4$; g) i^{13} .

2. Să se arate că numărul este real:

- a) $(1-i)^{24}$; b) $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$; c) $\frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$; d) $(\sqrt{3}+i)^6$.

3. Să se rezolve în **C** ecuația: a) $z^2 = -9$; b) $z\bar{z} + 2(z-\bar{z}) = 20+8i$; c) $2z^2 - 2z + 1 = 0$.

4. Să se calculeze modulul numărului $z = \frac{8+i}{7-4i}$.

5. Fie $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. Să se calculeze: a) $\bar{z}_1 \cdot z_2$; b) $(z_1 : \bar{z}_2)^2$.

6. Să se rezolve exercițiul 6, **C**.

B₁ 7.  **Lucrați în perechi!** Să se determine $z = x + iy$, dacă $2z = |z| + 2i$.

8. Să se determine partea reală a numărului $(\sqrt{3}+i)^6$.

9. Să se rezolve în **C** ecuația:

- a) $z^2 - 3|z| + 3 = 0$; b) $|z| - 2z + 2i = 0$; c) $\begin{cases} |z| = |z-2i|, \\ |z-i| = |z-1| \end{cases}$;
d) $z^2 + |z| = 0$; e) $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$.

10. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul:

- a) $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}$; b) $\sin \alpha - i \cos \alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Să se determine rădăcinile de ordinul trei ale numărului:

- a) $-2 + 2i\sqrt{3}$; b) $-\frac{3}{8}(\sqrt{3}+i)$.

12. Să se calculeze:

- a) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12}$; b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{12} + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{12}$; c) $\frac{(1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{12}}$.

C₁ 13. Știind că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

14. Să se determine n , $n \in \mathbb{N}$, pentru care este adevărată egalitatea $(1+i)^n = (1-i)^n$.

15.  **Investigați!** Fie numerele complexe $z_0 = 1+i$, $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2+3i$, $z_3 = 3+i$ și M_0, M_1, M_2, M_3 respectiv imaginile lor.

a) Să se calculeze $|z_1 - z_0|$, $|z_2 - z_0|$, $|z_3 - z_0|$.

b) Să se determine care dintre punctele M_1, M_2, M_3 aparțin discului de centru M_0 și rază 2.

16. a) Să se rezolve în **C** ecuația $z^2 + 2z + 3 = 0$.

b) Să se determine modulele soluțiilor ecuației.

c) Să se afle imaginea a cărei soluții aparține cercului de centru $M(1, 1)$ și rază 3.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilurile umanist, arte, sport

- Pentru care $x, y \in \mathbb{R}$ sunt egale numerele $z_1 = (2 + 3i)x - 3x + 4i$ și $z_2 = (2i - 5y)(3 - i)$? ⑥
 - Calculați: a) $(2 - 3i) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right)$; b) $\frac{2 - 3i}{7 + i}$. ⑧
 - Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $(3 + 2i)z + 5z = 4$. ④
 - a) Argumentați că ecuația $7z^2 - 2z + 13 = 0$ nu are soluții reale. ②
b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ această ecuație. ⑥
 - Fie $z = -1 - i$.
a) Calculați z^2 . ②
b) Indicați litera corespunzătoare variantei corecte. ⑧
- Numărul z este soluție a ecuației
- A $x^2 + (2 + i)x - 3i = 0$. B $x^2 + 4x + 1 = 0$.
C $x^2 + (2 + 2i)x + 2i = 0$. D $x^2 + 1 = 0$.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36-35	34-31	30-27	26-22	21-16	15-11	10-7	6-4	3-2	1-0

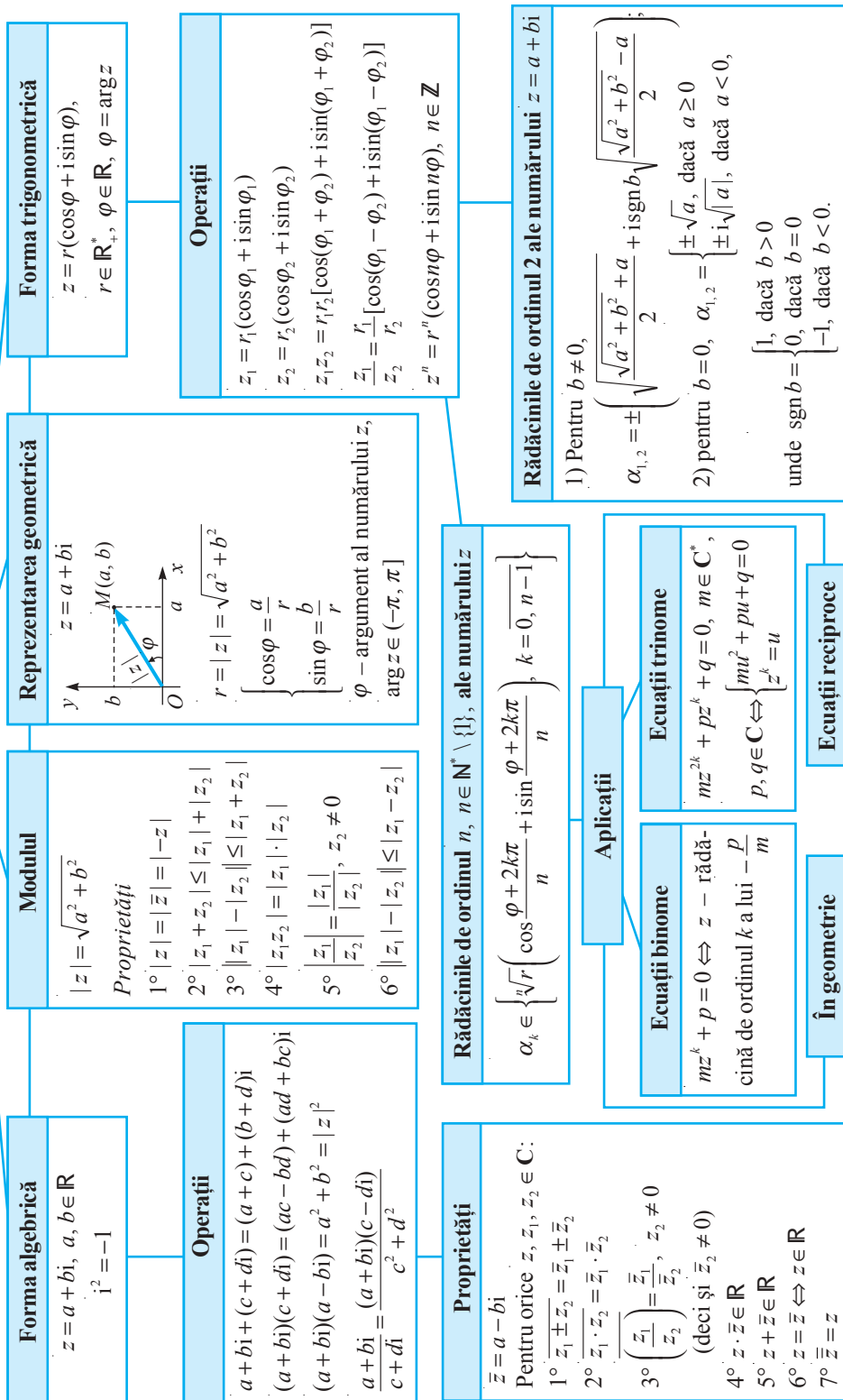
Profilul real

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

- Calculați: a) $(1 - 2i)^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; b) $\frac{3 - i}{2i - 7}$. ④
- a) Determinați dacă ecuația $2z^2 + \sqrt{7}z + 7 = 0$ are soluții reale. ②
b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ această ecuație. ④
- Determinați $z = x + iy$, dacă $1 - z - z\bar{z} = i$. ⑥
- Scrieți în formă algebrică numărul $a = \frac{(1 + i\sqrt{3})^{12}}{(-2 + 2i)^5}$. ⑧
- a) Argumentați că ecuația $2z^3 = 3i$ are soluții doar numere complexe nereale. ②
b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ această ecuație. ④
- a) Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale xOy locul geometric al punctelor $M(x, y)$ ale căror afixe $z = x + iy$ satisfac condiția $1 \leq |z - 2i| \leq 3$. ⑥
b) Aparține acestui domeniu imaginea numărului $z = 1 - i$?
Argumentați răspunsul.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36-35	34-31	30-27	26-22	21-16	15-11	10-7	6-4	3-2	1-0



Matrice. Determinanți. Sisteme de ecuații liniare

Obiective

- ⇒ identificarea tipurilor de matrice, utilizarea terminologiei aferente noțiunii de matrice în diverse contexte;
- ⇒ aplicarea operațiilor cu matrice și a proprietăților acestora în diverse contexte, *inclusiv la rezolvarea ecuațiilor matriciale;
- ⇒ recunoașterea în diverse situații a determinanților de ordinele 2, 3, calculul lor prin diferite metode; *aplicarea proprietăților determinanților la calculul determinanților de ordinul 4;
- ⇒ rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, *inclusiv a celor omogene, prin diferite metode;
- ⇒ utilizarea elementelor de algebră superioară studiate în abordarea unor situații cotidiene și/sau pentru rezolvarea unor probleme din diverse domenii.

§1 Matrice

1.1. Noțiuni generale

Două întreprinderi produc înghețată. Pentru aceasta ele folosesc 4 componente principale: lapte, frișcă, zahăr și cacao. Prima întreprindere folosește zilnic: 890 l de lapte, 400 kg de frișcă, 250 kg de zahăr, 90 kg de cacao. A doua întreprindere folosește zilnic 1500 l de lapte, 700 kg de frișcă, 400 kg de zahăr și 160 kg de cacao. O întreprindere de transport a încheiat un contract de livrare a acestor produse întreprinderilor menționate. Managerul firmei de transport a aranjat (pentru comoditate) aceste date în următorul tablou:

$$\begin{pmatrix} 890 & 400 & 250 & 90 \\ 1500 & 700 & 400 & 160 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Tablourile de acest fel (numite matrice) se aplică în matematică, statistică, economie și în alte domenii.

Definiție. Se numește **matrice** de tip (m, n) sau $m \times n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, un tablou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

format din $m \cdot n$ elemente aranjate în m linii și n coloane.

Se notează: $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Elementele $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ formează **linia i** , iar elementele $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ – **coloana j** a matricei (2). Deci, primul indice (i) al elementului a_{ij} (se citește a-i-j; de exemplu, a_{12} – a-unu-doi, și nu a-doisprezece) indică linia, iar al doilea (j) – coloana în care el se află.

De exemplu, matricea (1) este de tip (2, 4), $a_{21} = 1500$, $a_{22} = 700$.

Exercițiu. Scrieți: a) elementele matricei (1); b) liniile și coloanele matricei (1).

Mulțimea matricelor de tip (m, n) cu elemente din $\mathbf{C}$ (respectiv din $\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$) se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ (respectiv $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R}), \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Q}), \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Z})$). În cele ce urmează vom studia matrice cu elemente numere complexe, dacă nu este specificat altceva.

Deosebim mai multe tipuri de matrice. Pentru $m = n$ matricea (2) are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ și se numește } \textbf{matrice pătratică de ordinul } n. \text{ În acest caz,}$$

mulțimile $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C}), \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R}), \dots$ se notează, respectiv, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \dots$ În matricea pătratică, elementele $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formează **diagonala principală**, iar elementele $a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n-1, 2}, a_{n1}$ – **diagonala secundară** a acestora. O matrice pătratică în care toate elementele situate deasupra (respectiv dedesubtul) diagonalei principale sunt egale cu 0 se numește **inferior** (respectiv **superior**) **triunghiulară**.

$$\text{Pentru } n = 1 \text{ matricea (2) ia forma } A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \text{ și se numește } \textbf{matrice-coloană}, \text{ iar}$$

pentru $m = 1$ matricea (2) devine $A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ și se numește **matrice-linie**. Matri-

$$\text{cea pătratică de ordinul } n \text{ de forma } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ se numește } \textbf{matrice unitate} \text{ și}$$

se mai notează cu I .

Dacă toate elementele matricei (2) sunt egale cu zero, atunci ea se numește **matrice nulă** sau **zero** și se notează cu $O_{m,n}$ sau cu O , dacă tipul ei este subînțeles.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3,2}$$

Matrice pătratică
de ordinul 3

Matrice unitate
de ordinul 3

Matrice superior
triunghiulară de ordinul 4

Matrice nulă
de tip (3, 2)

Dacă se știe că matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$, atunci o vom nota simplu $A = (a_{ij})$.

Definiție. Două matrice $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ se numesc **egale** dacă $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

1.2. Operații cu matrice

Adunarea matricelor, înmulțirea matricelor cu scalari, transpusa unei matrice

Definiție. Fie $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Se numește **suma** matricelor A și B matricea $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Se scrie: $D = A + B$.

Exemplu

Suma matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea

$$D = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-7 & 3+5 \\ -1+2 & 0-3 & -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Definiție. Se numește **produsul** matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ cu numărul $\alpha \in \mathbb{C}$ matricea $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Se scrie: $B = \alpha A$.

Observații. 1. Cu $-A$ vom nota matricea $(-1)A$, fiindcă $A + (-1)A = (-1)A + A = O$. Matricea $-A$ se numește **opusa matricei A** .

Pentru suma $B + (-A)$ se va folosi notația $B - A$.

2. Suma matricelor se definește doar pentru oricare două matrice de același tip, însă orice matrice poate fi înmulțită cu un număr.

Exemplu

Pentru matricele din exemplul precedent avem:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad iB = \begin{pmatrix} -i & -7i & 5i \\ 2i & -3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiție. Se numește **transpusa matricei** $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ matricea $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, astfel încât $b_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Dacă matricea A este de tip (m, n) , atunci transpusa ei este de tip (n, m) și se notează ${}^tA$; coloanele (liniile) ei coincid cu liniile (coloanele) respective ale matricei A .

Exemple

1. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine dacă pot fi efectuate operațiile $3 \cdot {}^tA - 5B$.

Întrucât matricele ${}^tA$ și B (deci și $3 \cdot {}^tA$ și $5B$) sunt de diferite tipuri, rezultă că nu poate fi calculată „matricea” $3 \cdot {}^tA - 5B$.

Proprietățile operațiilor cu matrice, definite mai sus, sunt expuse în

Teorema 1. Pentru orice matrice $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $D=(d_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și pentru orice numere $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, au loc egalitățile:

1° $A+B=B+A$ (adunarea este comutativă); 2° $A+(B+D)=(A+B)+D$ (adunarea este asociativă); 3° $A+O=O+A=A$ (matricea nulă O este element neutru la adunare); 4° $A+(-A)=-A+A=O$ (orice matrice are opusă);	5° $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$; 6° $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$; 7° $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$; 8° $1 \cdot A=A$; 9° $'(\alpha A)=\alpha'A$; 10° $'(A+B)='A+'B$; 11° $'(A)=A$.

Demonstrație

Pentru demonstrație se aplică definiția egalității matricelor și proprietățile operațiilor cu numere complexe. Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 2°.

Matricea $F=A+(B+D)$ este de același tip ca și matricea $F'=(A+B)+D$. Elementul f_{ij} al matricei F are forma $f_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+d_{ij})$, iar elementul respectiv f'_{ij} al matricei F' are forma $f'_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})+d_{ij}$. Deoarece adunarea numerelor complexe este asociativă, avem $f_{ij}=f'_{ij}$, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$. Deci, matricele F și F' sunt egale. ►

Exercițiu. Demonstrați celelalte proprietăți (în mod analog).

Proprietățile operațiilor cu matrice facilitează rezolvarea **ecuațiilor matriciale**, adică a ecuațiilor cu necunoscuta o matrice.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se rezolve ecuația $2 \cdot 'A+3X-4I_3=O$, unde $A=\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 1 & 0 & 3i \\ -2 & 3 & -i \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

În baza proprietăților 2°–4° din teorema 1, putem trece termenii cunoscuți în membrul drept, schimbându-le semnul.

Astfel,

$$3X = -2 \cdot 'A + 4I_3 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ i & 0 & 3 \\ 0 & 3i & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2i & 0 & -6 \\ 0 & -6i & 2i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2i & 4 & -6 \\ 0 & -6i & 4+2i \end{pmatrix}. \text{ Prin urmare, } X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2i & 4 & -6 \\ 0 & -6i & 4+2i \end{pmatrix}.$$

❑ Înmulțirea matricelor

Vom ilustra operația de înmulțire a matricelor printr-un exemplu.

O întreprindere mică produce jucării: păpuși (p) și bufoni (b).

Volumul vânzărilor (mii bucăți) în primul trimestru este reflectat de matricea:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} p & b \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{ian.} \\ \text{febr.} \\ \text{mar.} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Prețul de vânzare al fiecărei jucării (în lei) este indicat în matricea $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ b \end{matrix}$.

Determinăm venitul lunar (mii lei) pe care îl obține întreprinderea:

$$v_{11} = 5 \cdot 50 + 3 \cdot 90 = 520 \text{ (în luna ianuarie),}$$

$$v_{21} = 6 \cdot 50 + 7 \cdot 90 = 930 \text{ (în luna februarie),}$$

$$v_{31} = 4 \cdot 50 + 8 \cdot 90 = 920 \text{ (în luna martie).}$$

Se observă că v_{11} (respectiv v_{21} , v_{31}) se obține adunând produsele elementelor liniei întâi (respectiv liniei a doua, a treia) a matricei A cu elementele respective ale matricei-coloană B .

Matricea $V = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}$ reprezintă produsul matricei A cu matricea B .

Definiție. Fie matricele $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. Se numește **produsul** matricei A cu matricea B (în această ordine) matricea $D = (d_{sp}) \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathbb{C})$ ale cărei elemente d_{sp} se calculează astfel:

$$d_{sp} = a_{s1}b_{1p} + a_{s2}b_{2p} + \dots + a_{sn}b_{np} = \sum_{i=1}^n a_{si}b_{ip}, \quad s = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, k}.$$

Se scrie: $D = A \cdot B$ sau $D = AB$.

Altfel spus, elementul d_{sp} al matricei produs este egal cu suma produselor elementelor liniei s a matricei A cu elementele respective ale coloanei p a matricei B (se mai spune că elementul d_{sp} este produsul dintre linia s a matricei A și coloana p a matricei B).

Atenție. Produsul AB este definit numai în cazul în care numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B . Numărul de linii (coloane) ale matricei AB coincide cu numărul de linii (coloane) ale matricei A (B).

Exemplu

Să se calculeze $D = A \cdot B$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

În baza definiției, obținem:

$$D = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ -2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 & (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observație. Spre deosebire de înmulțirea numerelor, operația de înmulțire a matricelor nu este comutativă. În exemplul precedent s-a calculat produsul AB , iar BA nici nu are sens (nu există). Dar și în cazul în care ambele produse AB și BA au sens, ele nu sunt neapărat egale.

De exemplu:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Proprietățile înmulțirii matricelor sunt expuse în

Teorema 2. Dacă pentru matricele A, B, D are sens expresia dintr-un membru al unei egalități de mai jos, atunci este definită expresia și din celălalt membru și are loc egalitatea respectivă:

- 1° $A(BD) = (AB)D$ (înmulțirea este asociativă);
- 2° $A(B + D) = AB + AD$, $(A + B)D = AD + BD$ (înmulțirea este distributivă față de adunare);
- 3° $(AB)^t = {}^tB \cdot {}^tA$;
- 4° $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, $I_n, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (I_n este element neutru la înmulțire în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$);
- 5° $A \cdot O = O$, $O \cdot A = O$.

Demonstrație

Aceste proprietăți se demonstrează în baza definiției egalității matricelor și a definițiilor operațiilor cu matrice.

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1°.

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ matrice arbitrare. Pentru ele are sens produsul $(AB)D$. Să observăm mai întâi că are sens și produsul $A(BD)$: matricea BD conține n linii și q coloane, deci este definit produsul $A(BD)$ și el este o matrice de tip (m, q) – același tip ca și al matricei $(AB)D$. Pentru a obține egalitatea elementelor respective, notăm: $U = AB = (u_{ij})$, $V = BD = (v_{ij})$, $S = (AB)D = (s_{ij})$, $T = A(BD) = (t_{ij})$.

Avem:

$$u_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl}, \quad v_{kj} = \sum_{l=1}^p b_{kl} d_{lj}, \quad s_{ij} = \sum_{l=1}^p u_{il} d_{lj} = \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} d_{lj}, \quad t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{ik} b_{kl} d_{lj},$$

adică $s_{ij} = t_{ij}$ pentru $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, q}$, și, în final, $A(BD) = (AB)D$. Aici am aplicat proprietățile operațiilor cu numere complexe. ►

Exercițiu. Demonstrați celelalte proprietăți.

Toate operațiile examinate anterior au sens în mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de aceea pot fi calculate puteri cu exponent natural ale unei matrice. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$. Se verifică fără dificultate egalitățile $A^s \cdot A^t = A^{s+t}$, $(A^s)^t = A^{st}$, $s, t \in \mathbb{N}^*$.

Exerciții rezolvate

☞ 1. a) Fie $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

Să se calculeze $f(A) = A^3 - 2A^2 + 3I_2$, pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Se poate calcula $f(B)$ dacă $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$?

Rezolvare:

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deci, } f(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Nu există B^2 , deci nu se poate calcula $f(B)$.

$$☞ 2. \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$☞ 3. \text{ Să se determine } A^n, \text{ dacă } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Rezolvare:

Vom aplica metoda inducției matematice.

Să intuim o formulă pentru A^n . Pentru aceasta, calculăm A^2, A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se poate presupune că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. Cu ajutorul inducției matematice se poate demonstra că această egalitate este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Noțiunile ce urmează vor fi aplicate la rezolvarea sistemelor arbitrare de ecuații liniare.

Definiție. Se spune că matricea nenulă A este o **matrice eşalon** (sau **matrice în trepte**) dacă primul (de la stânga) element nenul al fiecărei linii, începând cu a doua, e situat mai la dreapta decât primul element nenul al liniei precedente.

Exemplu

Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ este matrice eşalon, iar matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ – nu.

Observații. 1. Dacă matricea eşalon are linii nule, atunci ele sunt ultimele în această matrice.

2. Orice matrice eşalon pătratică este o matrice superior triunghiulară.

Pentru a obține dintr-o matrice dată o matrice eşalon, vom efectua asupra liniilor ei transformări asemănătoare cu cele pe care le efectuăm asupra ecuațiilor unui sistem pentru a obține un sistem echivalent.

Definiție. Se numesc **transformări elementare asupra liniilor** unei matrice următoarele transformări:

- 1) permutarea a două linii;
- 2) înmulțirea elementelor unei linii cu un număr nenul;
- 3) adunarea la elementele unei linii a elementelor respective ale altei linii, înmulțite cu același număr.

Matricele A și B de același tip se numesc **matrice echivalente** dacă una dintre ele se obține din cealaltă prin efectuarea unui număr finit de transformări elementare asupra liniilor.

Se scrie: $A \sim B$.

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Efectuăm asupra liniilor ei următoarele transformări (indicate cu ajutorul săgeților):

- a) permutăm liniile întâi și a doua.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

- b) înmulțim elementele liniei întâi cu i

$$i \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -i & 0 & 2i \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

- c) la elementele liniei întâi adunăm elementele respective ale liniei a doua înmulțite cu 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

- d) la elementele liniei întâi înmulțite cu 3 adunăm elementele liniei a doua înmulțite cu 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3. Pentru orice matrice nenulă A există cel puțin un șir finit de transformări elementare asupra liniilor care, efectuate consecutiv, reduc A la o matrice eșalon.

Exemplu

Vom reduce o matrice la o matrice eșalon, arătând cu săgeți transformările elementare efectuate consecutiv:

$$i \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Observații. 1. Există mai multe șiruri de transformări elementare asupra liniilor cu ajutorul cărora din matricea dată A se obține o matrice eșalon.

2. Matricea eșalon la care poate fi redusă A nu este unică, însă toate au același număr de linii nenule.

Exerciții și probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

A 1. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3i \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; e) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & i \end{pmatrix}$; f) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 2 & 0 & -i \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; g) $2i \cdot \begin{pmatrix} 3 & i & 5 \\ 0 & 2 & i \\ 1 & i-1 & -3 \end{pmatrix}$;

h) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 7i & -1 \\ 3 & 8i \end{pmatrix} - i \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ i & 3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.  **Lucrați în perechi!** Să se determine numerele x, y , dacă

$$x \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Să se calculeze AB , BA (în caz dacă există produsul respectiv):

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & x \\ b & 1 & y \\ c & 1 & z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$, $B = I_3$.

4. Să se calculeze:

a) $\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2$; e) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}^2$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$; g) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^4$.

B 5. Să se calculeze $A^2 - B^2$ (în caz dacă există), unde A, B sunt din exercițiul 3.6. Să se afle matricea X , astfel încât $3X + A = 2B$, unde A, B sunt din exercițiul 3 a), c).7.  **Lucrați în perechi!** Să se calculeze $f(A)$, dacă:

a) $f(X) = X^3 - 2X + I_3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $f(X) = X^3 - 3X + 2I_3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- C 8.** Cinci șantiere de construcție C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 folosesc cărămidă produsă la fabrici amplasate în localitățile A, B, C . Prețurile (sute lei) pentru transportarea unui palet cu 1000 de cărămizi de la fiecare fabrică la fiecare șantier sunt indicate în următoarea matrice:

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \end{matrix}$$

Începând cu luna viitoare, prețurile se vor majora cu 10%. Folosind operația de înmulțire a matricei cu un scalar, să se afle noile prețuri.

- 9.** Numărul de paleți cu cărămidă transportați de la fabrici la șantiere (a se vedea problema 8) în primele trei luni ale anului sunt date respectiv de matricele M_1, M_2, M_3 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 8 & 5 \\ 10 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicând operații cu matrice, să se determine numărul total de paleți cu cărămidă transportați de la fiecare fabrică la fiecare șantier în aceste trei luni.

- 10.**  **Investigați!** În matricele de mai jos sunt indicate rezultatele testării la matematică în două clase (linia a doua conține numărul de note respective).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 & 5 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) În care clasă nota medie este mai mare?
b) Să se propună o variantă de schimbare a rezultatelor testării în prima clasă, astfel încât nota medie să fie mai mare decât în a doua clasă.
- 11.** Este adevărată egalitatea matricială $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Profilul real

- A₁ 1.** Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ -2 & i \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 2-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 3i \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} 3 & i \\ i & 2+i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 3 \end{pmatrix};$

e) $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & i \end{pmatrix};$

f) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ i & 0 & 7 \\ 2 & -i & 3 \end{pmatrix};$

g) $2i \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 2 & i-1 \\ 5 & i & -3 \end{pmatrix};$

h) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

i) $\begin{pmatrix} 7i & 3 \\ -1 & 8i \end{pmatrix} - i \cdot \begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$

j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2.  **Lucrați în perechi!** Să se determine numerele x, y, z, u , dacă

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & z & 6 \\ 1 & u & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Să se calculeze AB, BA (în caz dacă există produsul respectiv):

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix};$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix};$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix};$ d) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$ f) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4. Să se calculeze:

a) $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right];$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$
d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2;$ e) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^2;$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^3;$ g) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^4.$

B₁ 5. 1) Să se calculeze $A^2 - B^2$ (în caz dacă există), unde A, B sunt din exercițiul 3.

2) Este adevărată egalitatea matricială $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$?

6. Să se afle matricea X , astfel încât $3X + A = 2B$, unde A, B sunt din exercițiul 3.

7. Să se rezolve problema 8, **C**.

8. Să se rezolve problema 9, **C**.

9. Să se calculeze:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*;$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}^*;$ c) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k, k \in \mathbb{N}^*;$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 18 & 8 \\ -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix};$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

10. Să se calculeze $f(A)$, dacă:

a) $f(X) = X^3 - 2X + I_3, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$ b) $f(X) = X^3 - 3X + 2I_3, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

C₁ 11. Să se arate că egalitatea $AB - BA = I$ este falsă, oricare ar fi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- 12.** O întreprindere preconizează să procure 3 tipuri de mașini T_1, T_2, T_3 de la 3 furnizori F_1, F_2, F_3 . Numărul de mașini procurate de la fiecare furnizor este indicat în următoarea matrice:

$$M = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}.$$

În funcție de varianta de completare a acestor mașini (două variante: V_1 și V_2), întreprinderea le poate procura de la fiecare furnizor la următoarele prețuri (u.m.):

$$P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ 5,1 & 4,1 \\ 5,2 & 4,0 \\ 5,0 & 3,8 \end{pmatrix} \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}.$$

Să se determine suma care trebuie achitată fiecărui furnizor (în ambele variante).

- 13.  Investigați!** În matricele de mai jos sunt indicate rezultatele testării la matematică în două clase (linia a doua conține numărul de note respective).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 8 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) În care clasă nota medie este mai mare?
 b) Să se propună o variantă de schimbare a rezultatelor testării în prima clasă, astfel încât nota medie să fie mai mare decât în a doua clasă.
- 14.** a) Dacă $A \cdot B = B \cdot A$, atunci matricele A, B sunt neapărat pătratiche de aceeași dimensiune? Să se argumenteze răspunsul.
 b) Să se aducă un exemplu de matrice A, B ($A \neq B$ și diferite de matricea unitate) ce satisfac egalitatea menționată.

§2 Determinanți

Multe probleme pot fi rezolvate cu ajutorul sistemelor de ecuații liniare (adică ecuații de tipul $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$, $c, a_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$). De exemplu, un elev a cumpărat 22 de caiete și creioane, achitând cumpărătura cu 20 u.m. Câte caiete și câte creioane au fost procurate, dacă un caiet costă 1,5 u.m., iar un creion 0,5 u.m.? Notăm cu x numărul de caiete, cu y – numărul de creioane cumpărate. Din condiția problemei obținem sistemul de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute: $\begin{cases} x + y = 22, \\ 2,5x + 1,5y = 42. \end{cases}$ Aplicând una dintre metodele cunoscute (metoda reducerii, metoda substituției), obținem $x = 9$, $y = 13$.

În caz general, se examinează sisteme de ecuații liniare care conțin mai multe ecuații și mai multe necunoscute, pentru rezolvarea cărora metodele menționate sunt mai puțin eficiente. În cele ce urmează vom expune alte metode de rezolvare, axate pe noțiunea de matrice și pe noțiunea de determinant al matricei.

Observație. În acest paragraf, termenul „matrice” va semnifica „matrice pătratică”.

2.1. Determinanți de ordinul 2 (3).

Sisteme de 2 (3) ecuații liniare cu 2 (3) necunoscute

Forma generală a unui sistem arbitrar de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, \quad i, j = \overline{1, 2}. \quad (1)$$

Matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se numește **matricea sistemului** (1).

Considerând că în fiecare ecuație cel puțin o necunoscută are coeficient nenul, rezolvăm sistemul aplicând metoda reducerii. Obținem:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases} \quad (2)$$

Evident, orice soluție a sistemului (1) este soluție și pentru (2). Fie $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, atunci obținem

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (3)$$

Definiție. Numărul $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numește **determinantul matricei**

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sau **determinant de ordinul 2**.

Se mai notează: $\det A$, $|A|$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Deci, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta$.

Expresia Δ se numește și **determinant principal al sistemului** (1).

Se observă că numărătorii rapoartelor din (3) de asemenea sunt valori ale unor determinanți, și anume: $b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1$, $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_2$, numiți **determinanți secundari** (sau **auxiliari**) ai sistemului (1).

Menționăm că Δ_1 (sau Δ_2) este determinantul care se obține din $|A|$ prin substituirea coloanei 1 (respectiv coloanei 2) cu coloana $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ a termenilor liberi ai sistemului inițial.

Exemplu

Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ este numărul $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$.

Rezultatul obținut (3) stă la baza următoarei propoziții:

Teorema 4 (regula lui Cramer¹). Dacă determinantul principal Δ al sistemului (1) este nenul, atunci sistemul are o soluție unică: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.



Gabriel Cramer

¹ Gabriel Cramer (1704–1752) – matematician elvețian.

Demonstrație

Din transformările efectuate mai sus rezultă unicitatea soluției: dacă $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ este o soluție a sistemului (1), atunci ea coincide cu valorile pentru x_1 , x_2 calculate din (3). Faptul că expresiile (3) pentru x_1 , x_2 sunt soluții se verifică prin substituirea lor în (1). ►

Exercițiu rezolvat

☞ Să se rezolve în $\mathbb{R}$, prin metoda (regula) lui Cramer, sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

Rezolvare:

Întrucât $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16 \neq 0$, putem aplica regula lui Cramer. Obținem:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7. \quad \text{Prin urmare, } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{8}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{7}{16}.$$

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ \left(\frac{5}{8}, -\frac{7}{16} \right) \right\}.$$

Aplicând metoda reducerii pentru a rezolva sistemul de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute, a cărei formă generală este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, i, j = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

$$\text{se pot obține ecuațiile } \Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \quad \Delta \cdot x_2 = \Delta_2, \quad \Delta \cdot x_3 = \Delta_3, \quad (5)$$

$$\text{unde } \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

$$\Delta_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32},$$

$$\Delta_2 = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33},$$

$$\Delta_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3.$$

Definiție. Se numește **determinant al matricei** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ sau **determinant de ordinul 3** numărul

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

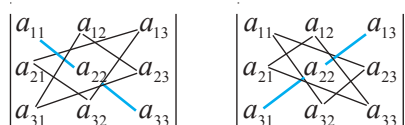
Se mai notează: $\det A$, $|A|$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 0 \cdot (-4) = -11.$$

Observații. 1. Determinantul matricei A de ordinul 3 este o sumă de șase termeni, fiecare fiind produsul a 3 elemente situate câte unul în fiecare linie și în fiecare coloană a matricei A (a determinantului).

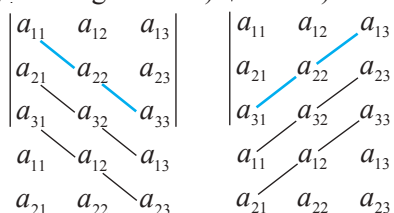
2. Pentru memorizarea algoritmului de calcul al determinantului de ordinul 3, se poate utiliza **regula triunghiurilor** (fig. 7.1) sau **regula lui Sarrus** (fig. 7.2): se iau cu semnul plus produsele elementelor unite printr-o linie sau plasate în vârfurile unui triunghi din figura 7.1 a) sau 7.2 a), iar cu semnul minus – produsele elementelor unite printr-o linie sau plasate în vârfurile unui triunghi din figura 7.1 b) sau 7.2 b).



a)

b)

Fig. 7.1



a)

b)

Fig. 7.2

Revenim la rezolvarea sistemului (4). Expresia Δ se numește **determinant principal** al acestui sistem (determinantul matricei A a sistemului). Mai observăm că termenii liberi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ai ecuațiilor (5) sunt și ei determinanți de ordinul trei (verificați!):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Menționăm că Δ_i ($i = \overline{1, 3}$) (numit **determinant auxiliar**) este determinantul matricei care se obține din matricea A a sistemului (4) prin substituirea coloanei i cu coloana termenilor liberi ai sistemului (4).

Aplicând egalitățile (5), obținem următoarea teoremă, similară cu teorema 4.

Teorema 5 (regula lui Cramer). Dacă determinantul principal Δ al sistemului (4) este diferit de zero, atunci sistemul are o soluție unică:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine dacă poate fi aplicată regula lui Cramer și să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Rezolvare:

Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 4 - 12 + 2 = -12$ și este nenul, rezultă că regula lui

Cramer poate fi aplicată.

Calculăm determinanții auxiliari:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -12; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12.$$

Obținem soluția: $x_1 = \frac{-12}{-12} = 1, \quad x_2 = \frac{0}{-12} = 0, \quad x_3 = \frac{-12}{-12} = 1.$

Răspuns: $S = \{(1, 0, 1)\}.$

Observație. Rezolvarea sistemelor de acest fel, în caz că determinantul principal este nul, se va examina în § 3.

2.2. Determinanți de ordinul n

Metoda lui Cramer de rezolvare a sistemelor de 2 (sau 3) ecuații liniare cu 2 (respectiv 3) necunoscute se va extinde pentru un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Rezolvarea sistemului se axează pe noțiunea de determinant de ordinul n .

Inițial, pentru comoditate, vom considera determinantul de ordinul 1, **det**(a_{11}) = a_{11} , și vom expune un alt algoritm de calcul al determinanților de ordinul 3, numit **dezvoltarea determinantului după o linie/coloană**. În acest scop, grupăm termenii din definiția determinantului de ordinul 3, evidențiind elementele liniei întâi:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Acest rezultat poate fi scris sub forma:

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Determinanții de ordinul doi din această expresie se numesc **minori complementari** ai elementelor respective a_{1j} din fața lor: ei reprezintă determinanții matricelor obținute din matricea inițială suprimând linia 1 și coloana j . Minorul complementar al elementului a_{1j} se notează cu $\overline{M}_j^1$. În aceste notații, pentru determinantul matricei A se obține expresia $|A| = a_{11}(-1)^{1+1} \overline{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2} \overline{M}_2^1 + a_{13}(-1)^{1+3} \overline{M}_3^1$, care se numește **dezvoltarea determinantului după linia întâi**. În mod analog se obține dezvoltarea aceluiași determinant de ordinul 3 după oricare linie sau coloană. De exemplu, se verifică ușor egalitatea:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{13}(-1)^4 \overline{M}_3^1 + a_{23}(-1)^5 \overline{M}_3^2 + a_{33}(-1)^6 \overline{M}_3^3, \end{aligned}$$

care reprezintă **dezvoltarea determinantului după coloana a treia**.

În mod analog se obțin dezvoltările determinantului după oricare altă linie/coloană.

Exercițiu. Scrieți dezvoltările determinantului de ordinul 3 după alte linii, coloane.

Exercițiu rezolvat

☞ Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, dezvoltându-l după o coloană.

Rezolvare:

Dezvoltăm determinantul după coloana întâi (elementul nul facilitează calculul):

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) + 0 + 4 \cdot (-2) = -12.$$

Vom introduce noțiunea de determinant al matricei pătratică de ordinul n (pe scurt – determinant de ordinul n), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, inductiv, presupunând cunoscute noțiunea de determinant de orice ordin mai mic sau egal cu $n-1$ și noțiunea de **minor complementar** al elementului a_{ij} al matricei $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$. Acesta este determinantul matricei obținute din A prin suprimarea liniei i și coloanei j ; se notează cu $\overline{M}_j^i$.

Definiție. Se numește **determinant al matricei** $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, sau **determinant de ordinul n** numărul

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1} \overline{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2} \overline{M}_2^1 + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n} \overline{M}_n^1 = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \overline{M}_j^1. \quad (6)$$

Se mai notează: $|A|$, $\det A$ sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Noțiunea ce urmează este extrem de utilă pentru calculul determinantilor, precum și pentru rezolvarea altor probleme.

Definiție. Se numește **complement algebric** al elementului a_{ij} al matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, (al determinantului $|A|$) numărul $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_j^i$.

De exemplu, minorul complementar al elementului a_{23} al determinantului $|A|$ din exercițiul precedent este $\overline{M}_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$, iar complementul algebric al acestuia este numărul $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot 6 = -6$.

În acești termeni, definiția determinantului poate fi formulată astfel:

Determinantul matricei este egal cu suma produselor elementelor liniei întâi cu complementii algebrici respectivi:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}. \quad (7)$$

Formulele (6) și (7) (pentru $n=3$, ele coincid cu formula de dezvoltare a determinantului de ordinul 3 după prima linie, obținută anterior) sunt numite **dezvoltare a determinantului după linia întâi**.

Exercițiu rezolvat



Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-3) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (+15) + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \cdot 0 = -15.$$

Dacă în definiția determinantului am putea înlocui elementele primei linii cu cele ale altei linii (ca și pentru determinanții de ordinul 3), atunci am calcula determinantul precedent mai simplu: dezvoltându-l după linia a patra, vom avea nevoie doar de un minor complementar, deoarece ceilalți se vor înmulți cu 0. Teorema de mai jos stabilește că acest fapt este posibil.

Teorema 6. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Pentru orice $i = \overline{1, n}$ are loc egalitatea

$$\Delta = |A| = a_{i1}(-1)^{i+1} \overline{M}_1^i + a_{i2}(-1)^{i+2} \overline{M}_2^i + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} \overline{M}_n^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}. \quad (8)$$

Formula (8) se numește **formula dezvoltării determinantului după linia i** .

Exercițiu rezolvat



Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare:

Aplicăm teorema 6 dezvoltând determinantul după linia a patra (deoarece ea conține cele mai multe elemente egale cu 0).

$$|A| = 0 \cdot (-1)^{4+1} \overline{M}_1^4 + 0 \cdot (-1)^{4+2} \overline{M}_2^4 + 3 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+4} \overline{M}_4^4 = (-3) \cdot 5 = -15.$$

Ideea de dezvoltare a determinantului după o linie care are mai multe elemente egale cu 0 generează o altă idee: posibilitatea dezvoltării determinantului după o coloană. Teorema ce urmează confirmă acest fapt.

Teorema 7. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$. Oricare ar fi $j = \overline{1, n}$,

$$\Delta = |A| = a_{1j}(-1)^{1+j} \overline{M}_j^1 + a_{2j}(-1)^{2+j} \overline{M}_j^2 + \dots + a_{nj}(-1)^{n+j} \overline{M}_j^n = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Această formulă se numește *formula dezvoltării determinantului după coloana j* .

Exercițiu rezolvat

☞ Să se calculeze determinantul din exercițiul precedent, dezvoltându-l după coloana a doua.

Rezolvare:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \overline{M}_2^2 + 0 \cdot (-1)^{3+2} \overline{M}_2^3 + 0 \cdot (-1)^{4+2} \overline{M}_2^4 = -1 \cdot 15 = -15.$$

2.3. Proprietățile determinantilor

Calculul determinantilor în baza definiției este dificil dacă elementele lor conțin expresii voluminoase (radicali, logaritmi, numere complexe, ...). Următoarele proprietăți ale determinantilor vor facilita calculul lor. În plus, proprietățile 2°, 5°, 8° arată cum se modifică determinantul matricei dacă aplicăm transformări elementare asupra liniilor lui.

1° Determinantul matricei A este egal cu determinantul matricei transpuse ${}^tA$.

Proprietatea poate fi demonstrată pentru $n = 2$, $n = 3$ calculând $|A|$, $|{}^tA|$ sau utilizând inducția matematică pentru $n > 3$ (determinantul $|A|$ se dezvoltă după linia întâi, iar $|{}^tA|$ – după coloana întâi).

Observație. Din această proprietate rezultă că orice propoziție adevărată pentru liniile unui determinant va fi adevărată și pentru coloanele lui. Din acest motiv, proprietățile care urmează vor fi formulate doar pentru linii, însă ele sunt valabile și pentru coloane.

2° Dacă matricea B se obține din matricea A permutând două linii, atunci $|B| = -|A|$.

Demonstrație

Aplicăm metoda inducției matematice: pentru $k = 2$ proprietatea se verifică imediat, iar trecerea de la $k - 1$ la k , $k \geq 3$, se efectuează dezvoltând determinantul după o linie diferită de cele ce se permută. ►

3° Dacă o matrice A are două linii egale, atunci determinantul ei este egal cu zero.

Demonstrație

Într-adevăr, permutând liniile egale, obținem o matrice B , astfel încât, în baza proprietății 2°, $|B| = -|A|$. De fapt, $B = A$, deoarece am permutat linii egale. Prin urmare, $|A| = |B| = -|A|$, adică $2|A| = 0$ și deci $|A| = 0$. ►

4° Suma produselor elementelor unei linii a matricei A cu complementii algebrici respectivi ai elementelor oricărei altei linii este egală cu zero:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k).$$

Demonstrație

Expresia din membrul stâng al egalității reprezintă dezvoltarea după linia k a determinantului matricei care se obține din matricea A prin substituirea elementelor liniei k cu elementele respective ale liniei i , adică al unei matrice cu două linii egale, care este egal cu zero. ►

5° Dacă înmulțim toate elementele unei linii a unei matrice A cu un număr α , atunci determinantul matricei obținute A' este egal cu produsul dintre α și determinantul matricei A .

Se mai spune: factorul comun al elementelor unei linii poate fi scos în fața determinantului.

Demonstrație

Elementele a'_{ij} ale liniei i a matricei A' au forma: $a'_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$. Dezvoltând determinantul $|A'|$ după linia i , obținem: $|A'| = \sum_{j=1}^n (\alpha \cdot a_{ij}) \cdot A_{ij} = \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \alpha \cdot |A|$. ►

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2i & 3i \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 16i - 15i = i, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{deci} \quad \begin{vmatrix} 2i & 3i \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

6° Dacă toate elementele unei linii a unei matrice sunt egale cu 0, atunci determinantul acestei matrice este egal cu 0.

Proprietatea rezultă imediat din proprietatea 5° pentru $\alpha = 0$.

Analog cu proprietatea 5° se demonstrează proprietatea 7°.

7° Dacă o matrice conține două linii proporționale, atunci determinantul ei este egal cu 0.

Liniile i și s ale unei matrice A se numesc **linii proporționale**, dacă $a_{ij} = \beta \cdot a_{sj}$, $j = 1, n$.

Exemplu

$$\begin{vmatrix} 2 & i & -3 \\ 4 & 2i & -6 \\ 7 & \pi & i\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{fiindcă liniile 1 și 2 sunt proporționale.}$$

8° Dacă la elementele unei linii a matricei A adunăm elementele respective ale altei linii înmulțite cu unul și același număr nenul α , atunci se obține o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei A .

Demonstrație

Fie la elementele liniei k a matricei A se adună elementele respective ale liniei s înmulțite cu numărul α . Elementele liniei k a matricei obținute A' au forma: $a'_{kj} = a_{kj} + \alpha a_{sj}$. Dezvoltând determinantul $|A'|$ după linia k , obținem

$$|A'| = \sum_{j=1}^n (a_{kj} + \alpha \cdot a_{sj}) A_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{sj} A_{kj} = |A| + \alpha \cdot 0 = |A|. \quad \blacktriangleright$$

Exemplu

Dacă la elementele liniei a doua a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ adunăm elementele

respective ale liniei a treia înmulțite cu -2 , obținem matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Astfel, $|A| = |B| = 0$.

2.4. Calculul determinanților

Pentru a evita calcule complicate, se recomandă, în prealabil, să se efectueze transformări ale determinantului (utilizând proprietățile) pentru a obține unele elemente egale cu zero.

Observații. 1. a) Determinantul matricei pătratice (de ordinul 2, 3) inferior/superior triunghiulară este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

b) Determinantul matricei ale cărei elemente mai sus/jos de diagonala secundară sunt nule este egal cu opusul produsului elementelor de pe această diagonală:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}.$$

2. Pentru determinanții matricelor pătratice de ordinul patru situația este următoarea:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44};$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{41}a_{32}a_{23}a_{14}.$$

Aceste rezultate se obțin dezvoltând determinantul (și cei noi obținuți) după linia ce conține doar un element nenul.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 2 & 3i \\ i & 2+i & i \\ 1 & 4+i & 4i \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

La elementele liniei a doua adunăm elementele respective ale liniei întâi (proprietatea 8°): $\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 2 & 3i \\ 1 & 4+i & 4i \\ 1 & 4+i & 4i \end{vmatrix}$. Acest determinant este egal cu zero, fiindcă are 2 linii identice (proprietatea 3°).

2. Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Rezolvare:

Aplicând proprietățile 2°, 8°, se obține un determinant de formă triunghiulară:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 \cdot (-5) = 30.$$

Teorema 8 (determinantul produsului matricelor). Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Exemplu

Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, atunci $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $|A| = 1$, $|B| = -2$, $|AB| = -2$.

2.5. Matrice inversabile

Este bine cunoscut faptul că pentru orice număr complex nenul a există a^{-1} , astfel încât $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \frac{1}{a} \cdot a = 1$. În intenția de a găsi o matrice B pentru matricea A , astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I$, se introduce următoarea noțiune:

Definiție. O matrice pătratică A se numește **inversabilă** dacă există o matrice pătratică B , astfel încât $AB = BA = I$.

Matricea B se numește **inversa** matricei A și se notează A^{-1} .

Este clar că matricele B și I sunt de același ordin ca și A . Din relațiile $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ rezultă că A^{-1} de asemenea este inversabilă și că inversa ei este A , adică $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemple

Inversele matricelor $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sunt $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ și respec-

tiv $B^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, deoarece $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale matricelor inversabile

1° Inversa unei matrice inversabile este unică.

Demonstrație

Presupunem contrariul.

Fie B și C două matrice inverse ale matricei A , adică $CA = AC = I$ și $BA = AB = I$.

Din aceste egalități obținem: $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. ►

2° Dacă matricele $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile, atunci matricea $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k$ este inversabilă și $(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$.

Demonstrație

Într-adevăr, de exemplu pentru $k = 2$ avem

$$(A_1 \cdot A_2) \cdot (A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}) = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_2^{-1}) \cdot A_1^{-1} = A_1 I_2 A_1^{-1} = A_1 A_1^{-1} = I_2. \quad \blacktriangleright$$

Utilizând determinanții, complementii algebrici ai elementelor unei matrice pătratică, vom prezenta un criteriu de inversabilitate a matricei și o metodă de calcul al inversei unei matrice.

Teorema 9. Matricea pătratică este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este diferit de zero.

Demonstrație

Necesitatea rezultă din teorema 8. Într-adevăr, dacă matricea A este inversabilă, atunci $I = A \cdot A^{-1}$. Deci, $1 = |I| = |A| \cdot |A^{-1}|$, de unde rezultă că $|A| \neq 0$ și (foarte important!) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

Suficiența este de o mare importanță: demonstrația ei furnizează o formulă pentru calculul matricei inverse. Astfel, vom arăta că pentru $n \geq 2$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Într-adevăr, în baza proprietății 4° a determinanților, obținem:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{i1} a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{i2} a_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{in} a_{i1} \\ \sum_{i=1}^n A_{i2} a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{i2} a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{i2} a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n A_{in} a_{i1} & \sum_{i=1}^n A_{in} a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n A_{in} a_{in} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = \frac{|A|}{|A|} I = I. \end{aligned}$$

În mod analog se arată că $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Pentru $n=1$, din condiția $|A| = |a_{11}| \neq 0$ scriem $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} \end{pmatrix}$.

Deci, $AA^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. ►

Exercițiu rezolvat

☞ Să se determine inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

Calculăm determinantul matricei: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 12 = 22$.

Inversa există, întrucât determinantul matricei A este diferit de zero. Determinăm complementenții algebrici ai elementelor matricei A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

Conform formulei (9), obținem: $A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Aplicând inversa unei matrice, pot fi rezolvate diverse ecuații matriciale. Dacă matricele A și B au același număr de linii, atunci ecuația $AX = B$, unde A este pătratică cu $\det A \neq 0$, poate fi rezolvată în modul următor: înmulțind ambii membri ai ecuației la stânga cu A^{-1} , obținem, consecutiv, egalitățile matriciale:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad I \cdot X = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

De exemplu, pentru matricea A din exercițiul precedent și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avem

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -12 & 8 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 4 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercițiu. Arătați că soluția ecuației $XA = B$, $|A| \neq 0$, este matricea $X = B \cdot A^{-1}$.

Probleme rezolvate

☞ 1. Pentru producerea 1 t de bomboane „Masca” se folosesc 0,2 t de produse de cacao și 0,5 t de zahăr, iar pentru producerea 1 t de bomboane „Griliaj” se folosesc 0,14 t de produse de cacao și 0,6 t de zahăr (în afară de alte componente). Să se afle cantitatea de bomboane produse de fiecare fel, dacă s-au folosit 0,15 t de produse de cacao și 0,5 t de zahăr.

Rezolvare:

Fie x_1 și x_2 cantitatea (în tone) de bomboane produse „Masca” și respectiv „Griliaj”.

Alcătuiim sistemul de ecuații: $\begin{cases} 0,2x_1 + 0,14x_2 = 0,15 \\ 0,5x_1 + 0,6x_2 = 0,5 \end{cases}$ sau, în formă matricială, $AX = B$,

unde $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,14 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Calculăm: $A^{-1} = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,6 & -0,14 \\ -0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Înmulțind egalitatea $AX = B$ la stânga cu A^{-1} , obținem:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,6 & -0,14 \\ -0,5 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,05} \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Astfel, au fost produse 0,4 t de bomboane „Masca” și 0,5 t de bomboane „Griliaj”.

☞ 2. Se poate demonstra că aria triunghiului $M_1M_2M_3$, unde $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,

$M_3(x_3, y_3)$, se calculează conform formulei: $\mathcal{A}_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. În particular,

punctele M_1 , M_2 , M_3 vor fi coliniare, dacă determinantul respectiv este nul.

Fie punctele $M_1(2, 3)$, $M_2(3, 0)$, $M_3(2, 2)$. Să se calculeze aria triunghiului $M_1M_2M_3$ sau să se arate că punctele respective sunt coliniare.

Rezolvare:

Determinantul $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ este egal cu -1 , deci punctele în cauză nu sunt coliniare.

Aria $\Delta M_1M_2M_3$ este $\frac{1}{2} \cdot |-1| = \frac{1}{2}$ (unități pătrate).

Exerciții propuse

Profilurile umanist, arte, sport

A 1. 1) Să se calculeze determinantul:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; & \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}; & \text{c)} \begin{vmatrix} 2a & 3a \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; & \text{d)} \begin{vmatrix} 5i & i \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; & \text{e)} \begin{vmatrix} 5-i & 5 \\ 3 & 5-i \end{vmatrix}; \\ \text{f)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 9 & 1 & 9 \\ 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}; & \text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; & \text{h)} \begin{vmatrix} -3 & 3 & -7 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}; & \text{i)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}; & \text{j)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}. \end{array}$$

2) Să se calculeze determinantul din 1.1) g) utilizând regula triunghiului, apoi, aplicând proprietățile determinantilor, să se obțină zerouri de o parte a diagonalei principale/secundare. Să se compare rezultatele.

2. 1) Să se determine dacă sistemul poate fi rezolvat prin regula lui Cramer:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 = 2; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 = 3; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = -3, \\ x_1 - x_2 = 6; \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} mx_1 + nx_2 = p, \\ -nx_1 + mx_2 = q, \end{cases} \quad m \cdot n \neq 0; & \text{f)} \begin{cases} x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2; \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases} \\ \text{h)} \begin{cases} x_1 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7; \end{cases} & \text{j)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \end{array}$$

2) Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele din 2.1) aplicând regula lui Cramer.

B 3. Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} (3+i)x + (4-2i)y = 2-6i, \\ (4-2i)x - (2-3i)y = 5-4i; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} (2-i)x + (2+i)y = 6, \\ (3-2i)x + (3+2i)y = 8; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - iy - 2z = 10, \\ x - y - 2iz = 20, \\ ix + 3iy + (1-i)z = -30. \end{cases} \end{array}$$

4. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$, unde $f(x) = 16x + 6$, $g(x) = 4x^2 + 2x$.

C 5.  **Investigați!** Dependența dintre cantitatea y (litri) a combustibilului consumat și greutatea x (tone), $x \in [1, 4]$, a încărcăturii unui automobil este dată de funcția

$$f(x) = \begin{vmatrix} 4 & x & 2 \\ x-1 & 2 & x \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

a) Să se scrie $f(x)$ în formă analitică. b) Pentru care x , $x \in [1, 4]$, $f(x) = 0$?
c) Pentru care x , $x \in [1, 4]$, pierderile combustibilului vor fi minime? Să se calculeze consumul respectiv.

6. Utilizând proprietățile determinantilor, să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a^2 \\ b+1 & 1 & b^2 \\ c+1 & 1 & c^2 \end{vmatrix}; & \text{b)} \begin{vmatrix} x+a & a & a \\ x+a & x & a \\ 2a & a & x \end{vmatrix}; & \text{c)} \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}. \end{array}$$

7.  **Lucrați în perechi!** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2x-4 & 2 & -2 \\ x & -3 & 1 \\ 2 & -5 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -x & a & a \\ x & a-x & a \\ 0 & a & a-x \end{vmatrix} = 0.$$

Profilul real

- A₁** 1. 1) Să se calculeze determinantul:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{d) (BAC, 2019) } \begin{vmatrix} 5i & 2 \\ i & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 2-i & i \\ 3 & 5-i \end{vmatrix};$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{g) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{h) } \begin{vmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{i) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{j) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

- 2) Să se calculeze determinantul din 1.1) g) utilizând regula triunghiului, apoi, aplicând proprietățile determinantilor, să se obțină zerouri de o parte a diagonalei principale/secundare. Să se compare rezultatele.

2. 1) Să se determine dacă sistemul poate fi rezolvat prin regula lui Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 = 1, \\ 7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_2 = 2; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 6; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} ax_1 + bx_2 = c, \\ -bx_1 + ax_2 = d, \quad a \cdot b \neq 0, \quad a \neq b; \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases} \quad \text{g) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases} \quad \text{i) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases} \quad \text{j) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

- 2) Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele din 2.1) aplicând regula lui Cramer.

3. Să se calculeze determinantul:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. 1) Să se determine dacă este inversabilă matricea:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

- 2) Utilizând complementenții algebrici ai elementelor, să se calculeze inversa matricei din 4.1).

B₁ 5. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0$, unde $f(x) = 8x + 3$, $g(x) = 2x^2 + x$.

6.  **Investigați!** Dependența dintre cantitatea y (litri) a combustibilului consumat și greutatea x (tone), $x \in [1, 4]$, a încărcăturii unui automobil este dată de funcția

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

- a) Să se scrie $f(x)$ în formă analitică. b) Pentru care x , $x \in [1, 4]$, $f(x) = 0$?
c) Pentru care x , $x \in [1, 4]$, pierderile combustibilului vor fi minime? Să se calculeze consumul respectiv.

7. Aplicând proprietățile determinantilor, să se demonstreze egalitatea:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

8. Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$$

9. Să se calculeze aria triunghiului $M_1M_2M_3$ sau să se arate că punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare. a) $M_1(2, 1), M_2(3, 4), M_3(1, 6)$; b) $M_1(0, 0), M_2(2, 1), M_3(4, 2)$;

c) $M_1(-2, 4), M_2(0, -3), M_3(1, 7)$; d) $M_1(5, 4), M_2(11, 0), M_3(0, 3)$.

10. Să se rezolve ecuațiile matriciale $AX = B, YA = B$, unde A este din 4 a) și B este din 4 b).

$$\text{11. Să se rezolve în } \mathbb{R} \text{ ecuația: a) } \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ x & -3 & 1 \\ 2 & -5 & x+1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a-x & a & a \\ a & a-x & a \\ a & a & a-x \end{vmatrix} = 0.$$

C₁ 12. Dacă vom schimba semnele tuturor elementelor determinantului, cum se va modifica determinantul de ordinul: a) 3; b) 4?

13. Cum se va schimba determinantul matricei $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ dacă fiecare element va fi înlocuit cu conjugatul său?

14. Cum se va schimba determinantul de ordinul 3 dacă fiecare element se va înmulți cu același număr nenul α ?

15. Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & c_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & c_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $z_i \in \mathbb{C}$, este un număr pur imaginar sau 0.

16. Utilizând proprietățile determinantilor, să se calculeze:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ c & b & a \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

17. Să se calculeze determinantul și să se scrie rezultatul sub formă de produs:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \\ b^2 + c^2 & a^2 + c^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}.$$

§3 Sisteme de ecuații liniare

3.1. Noțiuni generale

În acest paragraf vom determina condițiile în care un sistem arbitrar de ecuații liniare are soluții și vom expune unele metode de determinare a multimii soluțiilor acestuia.

Forma generală a unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute este:

[illegible]

Numerele a_{ij} , $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, se numesc **coeficienți ai necunoscutelor**, iar $b_1, b_2, \dots, b_m$ – **termeni liberi** ai sistemului. Din coeficienții necunoscutelor și din termenii

liberi formăm două matrice: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$,

numite, respectiv, **matricea sistemului** și **matricea extinsă** a sistemului.

Definiție. Sistemul ordonat de n numere complexe $(c_1, \dots, c_n)$ se numește **soluție** a sistemului (1) dacă, înlocuind necunoscutele x_j , respectiv, cu c_j , $j = \overline{1, n}$, fiecare ecuație din (1) se transformă într-o propoziție adevărată, adică

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot c_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Observatie. Pentru comoditate, vom prezenta soluția unui sistem de ecuații cu n necu-

noscute (fiind stabilită ordinea $x_1, \dots, x_n$) și ca o matrice-coloană $X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, considerând că se substituie $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$.

Se poate arăta că dacă un sistem de ecuații liniare are cel puțin două soluții, atunci mulțimea soluțiilor lui este infinită.

Un sistem de ecuații liniare se numește **compatibil** dacă el are cel puțin o soluție. Sistemul care are o soluție unică se numește **compatibil determinat**, iar cel care are mai mult decât o soluție – **compatibil nedeterminat**. Un sistem de ecuații care nu are soluții se numește **incompatibil**.

Exemple

Exemple Fie sistemele de ecuații liniare $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ 4x_1 - 8x_2 = 12; \end{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = 4. \end{cases}$

Primul sistem este compatibil determinat, fiindcă determinantul matricei sistemului este nenul și prin metoda lui Cramer stabilim că el are o soluție unică. Al doilea sistem este compatibil nedeterminat: soluții ale sistemului sunt, de exemplu, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; $x_1 = -3$, $x_2 = -3$. Ultimul sistem este incompatibil fiindcă membrii din stânga ai ecuațiilor sunt aceiași, iar cei din dreapta diferă.

Teorema 10. Dacă matricea A a sistemului (4) este inversabilă, atunci sistemul are o soluție unică:

$$X_0 = A^{-1} \cdot B. \quad (6)$$

Demonstrație

Înmulțind la stânga egalitatea (5) cu A^{-1} , obținem consecutiv: $A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot B$, $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $X = A^{-1} \cdot B$. În baza lemei din secvența 3.1, sistemele (5) și $X = A^{-1} \cdot B$ sunt echivalente: în calitate de U din lema s-a luat matricea inversabilă A^{-1} . ►

Exercițiu rezolvat

☞ Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Rezolvare:

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $|A| = -3$, $A_{11} = 2$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = -2$, $A_{23} = 1$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = 5$, $A_{33} = -1$.

Așadar, $A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, adică $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Răspuns: $S = \{(1, 0, 1)\}$.

☐ **Regula lui Cramer** (demonstrată în § 2 pentru $n = 2$, $n = 3$) este o altă metodă de rezolvare a sistemelor de n ecuații liniare cu n necunoscute, $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând proprietatea 4° (secvența 2.3), formula (7) (secvența 2.2) și formula (9) (secvența 2.5) pentru A^{-1} , din (6) obținem formulele pentru calculul valorilor necunoscutelor $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\text{Astfel, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n A_{i1} b_i \\ \sum_{i=1}^n A_{i2} b_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n A_{in} b_i \end{pmatrix}, \text{ de unde:}$$

$$x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^n A_{ij} b_i = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Delta_j \text{ fiind determi-}$$

nantul matricei care se obține din A prin substituirea coloanei j cu coloana termenilor liberi ai sistemului (4). Determinantul $\Delta = |A|$ se numește **determinant principal**, iar $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – **determinanți secundari ai sistemului** (4).

Rezultatul obținut este

Teorema 11 (regula lui Cramer). Dacă determinantul Δ al matricei sistemului de ecuații liniare (4) este diferit de zero, atunci sistemul este compatibil determinat și soluția sa este:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Exemplu

Aplicând teorema 11 sistemului de ecuații din exercițiul precedent, obținem $\Delta = -3$, $\Delta_1 = -3$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = -3$. Deci, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

3.3. Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

Spre deosebire de metodele examinate, **metoda lui Gauss** (numită și **metoda eliminărilor succesive**), expusă în continuare, poate fi aplicată la rezolvarea oricărui tip de sisteme de ecuații liniare (1). Asupra sistemelor vom efectua următoarele transformări ce permit să se obțină sisteme echivalente cu cel inițial (echivalența se verifică nemijlocit):

- permutarea a două ecuații;
- înmulțirea ambilor membri ai unei ecuații cu un număr nenul;
- adunarea la fiecare membru al unei ecuații a membrilor respectivi ai altei ecuații, înmulțiți cu unul și același număr.

Este clar că efectuarea acestor transformări asupra ecuațiilor unui sistem este echivalentă cu efectuarea transformărilor elementare respective asupra liniilor matricei extinse $\bar{A}$ a sistemului (a se vedea secvența 1.2).

Exemplele ce urmează vor facilita înțelegerea metodei lui Gauss și reprezintă două tipuri de sisteme care pot fi obținute ca rezultat al aplicării acestei metode.

1. Să se rezolve în $\mathbf{C}$ sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Observăm că matricea sistemului este superior triunghiulară, având toate elementele de pe diagonala principală nenule. Se spune că un atare sistem este **triunghiular**.

Sistemele de acest tip se rezolvă relativ simplu: din ultima ecuație calculăm valoarea ultimei necunoscute și o substituim în toate celelalte ecuații; din penultima ecuație calculăm valoarea penultimei necunoscute ș.a.m.d., până calculăm valoarea primei necunoscute din prima ecuație. Prin urmare, sistemul va avea o unică soluție.

În exemplul dat, din ultima ecuație obținem $x_3 = \frac{1}{2}$; substituim valoarea lui x_3 în primele două ecuații și din ecuația a doua obținem $x_2 = -\frac{1}{2}$; în final, substituind valoarea lui x_2 în prima ecuație, obținem $x_1 = 1$. Unica soluție a sistemului este: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Răspuns: $S = \left\{ \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$

2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Observăm că sistemul nu conține o ecuație de forma $0 = b$, $b \neq 0$, numărul necunoscutelor lui este mai mare decât numărul ecuațiilor și matricea sistemului are forma eșalon. Se spune că un atare sistem este **trapezic** (altfel zis, un sistem de ecuații liniare este un sistem trapezic dacă matricea lui are forma eșalon, numărul r de linii nenule ale matricei sistemului este egal cu numărul de linii nenule ale matricei extinse a sistemului și r este mai mic decât numărul de necunoscute ale sistemului). Necunoscutele ai căror coeficienți sunt primii nenuli în liniile matricei sistemului trapezic se consideră, de regulă, **necunoscute principale**, iar celelalte – **necunoscute secundare**.

În exemplul dat, considerăm x_1 și x_2 necunoscute principale, iar x_3 – necunoscută secundară.

Sistemul trapezic (inițial) se reduce la un sistem triunghiular în necunoscutele principale x_1 , x_2 în următorul mod:

Lăsăm în membrul stâng al fiecărei ecuații toți termenii ce conțin necunoscutele principale, iar ceilalți termeni îi trecem în membrul drept, schimbându-le semnul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 - x_3, \\ 3x_2 = 1 + x_3. \end{cases}$$

Notând necunoscuta secundară x_3 cu α , $\alpha \in \mathbb{C}$, și rezolvând sistemul, obținem așa-numita **soluție generală** a sistemului: $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\alpha$, $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Este clar că pentru fiecare valoare atribuită parametrului α se determină în mod unic valorile necunoscutelor principale. De exemplu, pentru $\alpha = 0$ obținem o soluție a sistemului $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 0$, numită **soluție particulară**.

Pentru $\alpha = -1$ se obține $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ – o altă soluție particulară a sistemului.

Parametrului α , deci și necunoscutei secundare x_3 , îi putem atribui o infinitate de valori din $\mathbb{C}$. Din acest motiv, sistemul este compatibil nedeterminat.

Observații. 1. Lista necunoscutelor principale se determină neunivoc: e important doar să se obțină un sistem triunghiular în raport cu necunoscutele principale.

De exemplu, în sistemul precedent pot fi numite necunoscute principale x_1 , x_3 .

2. Sistemele triunghiulare și sistemele trapezice sunt compatibile: sistemul triunghiular are soluție unică, iar sistemul trapezic are o mulțime infinită de soluții.

Compatibilitatea sistemelor de ecuații liniare este determinată de

Teorema 12. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{C})$ și $\overline{A} = (A | B)$. Sistemul de ecuații liniare $AX = B$ este compatibil dacă și numai dacă matricele eșalon A_1 , $\overline{A}_1$ obținute din A și respectiv $\overline{A}$ au același număr de linii nenule.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine compatibilitatea sistemului $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă $\bar{A}$ a sistemului și o reducem la forma eșalon:

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 2 & 1 & 5 & | & 10 \\ 1 & -1 & 7 & | & 8 \end{pmatrix} \sim -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & -3 & 9 & | & 6 \\ 0 & -3 & 9 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Matricele eșalon obținute din matricea sistemului, respectiv din matricea extinsă au câte 2 linii nenule. Prin urmare, sistemul inițial este compatibil.

2. Dacă în exemplul precedent termenul liber al ecuației a treia ar fi, de exemplu, 5,

atunci ultima matrice ar fi: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & -1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$.

Astfel, matricele eșalon obținute din matricea sistemului și din cea extinsă conțin 2 și respectiv 3 linii nenule, deci sistemul este incompatibil.

Ideea reducerii matricei extinse a sistemului la forma eșalon constituie baza **metodei lui Gauss** de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. De reținut că această metodă are avantajul de a fi ușor programabilă pe calculator. Ea constă în următoarele:

1. Scriem matricea extinsă $\bar{A} = (A | B)$ a sistemului (1).
2. Prin transformări elementare ale liniilor, reducem această matrice la o matrice eșalon $\bar{A}_1 = (A_1 | B_1)$, unde A_1 este matricea eșalon obținută din A .
3. Dacă numărul de linii nenule ale matricei A_1 nu este egal cu numărul de linii nenule ale matricei $\bar{A}_1$, atunci sistemul este incompatibil.
4. Dacă numărul de linii nenule ale matricei A_1 este r și este egal cu numărul de linii nenule ale matricei $\bar{A}_1$, atunci sistemul este compatibil.

Distingem două cazuri posibile.

- 4.1. Numărul r menționat în punctul 4 este egal cu numărul necunoscutelor. În atare caz, matricea eșalon A_1 este superior triunghiulară, toate elementele de pe diagonala principală sunt nenule. Scriem sistemul căruia îi corespunde matricea extinsă $\bar{A}_1$; evident, el este triunghiular și, prin urmare, are o soluție unică.
- 4.2. Numărul menționat r este mai mic decât numărul n al necunoscutelor. În acest caz, matricea eșalon A_1 conține mai multe coloane decât linii nenule. Scriem sistemul căruia îi corespunde matricea extinsă $\bar{A}_1$ (acest sistem este trapezic și este echivalent cu sistemul (1)). În continuare, specificăm necunoscutele principale (numărul lor este r), apoi necunoscutele secundare, pe care le notăm $x_p = \alpha$, $x_q = \beta$, ..., unde α , β , ... sunt parametri cu valori din C . Lăsăm în membrul stâng al fiecărei ecuații toți termenii ce conțin necunoscutele principale,

iar ceilalți termeni îi trecem în membrul drept, schimbându-le semnul. Deoarece $r < n$, în membrii din dreapta se va conține cel puțin un parametru. După aceste transformări se obține un sistem triunghiular de r ecuații cu r necunoscute (cele principale). Pentru fiecare set de valori atribuite parametrilor, într-un mod unic se determină valorile necunoscutele principale. Șirul obținut de valori pentru $x_1, \dots, x_n$ va constitui o **soluție particulară** a sistemului. În acest mod se obține o infinitate de soluții, deoarece parametrilor le putem atribui o infinitate de valori.

Observație. Pentru a descrie mulțimea infinită de soluții care se obțin în cazul 4.2, vom proceda astfel. Din sistemul redus $A_1 X = B_1$ exprimăm necunoscutele principale $x_k, x_l, \dots$ prin parametri $\alpha, \beta, \dots$. Sistemul de relații obținut:

$$\begin{cases} x_k = f_k(\alpha, \beta, \dots) \\ \dots\dots\dots \\ x_l = f_l(\alpha, \beta, \dots) \\ \dots\dots\dots \\ x_p = \alpha \\ x_q = \beta \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (7)$$

se numește **soluție generală** a sistemului (1) și descrie mulțimea tuturor soluțiilor acestui sistem, în sens că orice soluție a acestuia se obține din (7) pentru unele valori ale parametrilor.

Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Dacă el este compatibil nedeterminat, să se afle și o soluție particulară.

Rezolvare:

În exercițiul rezolvat 1 (p. 218) s-a arătat că sistemul este compatibil nedeterminat. Pentru a determina soluția generală, scriem sistemul corespunzător matricei eșalon:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ -x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Necunoscute principale pot fi alese x_1 și x_2 , atunci necunoscută secundară va fi x_3 . Notând necunoscuta secundară cu α , $\alpha \in \mathbb{C}$, obținem sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 + 2\alpha, \\ -x_2 = 2 - 3\alpha. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem în necunoscutele x_1, x_2 , aflăm soluția generală:

$$x_1 = 6 - 4\alpha, \quad x_2 = -2 + 3\alpha, \quad x_3 = \alpha.$$

Dacă atribuim lui α , de exemplu, valoarea 0, obținem o soluție particulară a sistemului:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0.$$

Răspuns: $S = \{(6 - 4\alpha, -2 + 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\};$

soluție particulară: $(6, -2, 0).$

2. Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = \alpha \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$
 analizând toate

cazurile posibile (în funcție de valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{C}$).

Rezolvare:

Formăm matricea extinsă a sistemului și o reducem la o matrice eșalon:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & \alpha-1 \\ 0 & 1-\alpha & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 6-3\alpha & -3+\alpha-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

- 1) Dacă $6-3\alpha \neq 0$, adică $\alpha \neq 2$, atunci sistemul este triunghiular, deci este compatibil determinat, cu soluția unică: $x_1 = \frac{3+\alpha}{6-3\alpha}$, $x_2 = \frac{3+\alpha}{-6+3\alpha}$, $x_3 = \frac{\alpha^2 - \alpha + 3}{-6+3\alpha}$.
- 2) Dacă $6-3\alpha = 0$, adică $\alpha = 2$, atunci sistemul obținut este incompatibil, deoarece matricea eșalon A_1 obținută din matricea sistemului are 2 linii nenule, iar cea obținută din matricea extinsă – 3 linii nenule.

3. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 3+2i, \\ 2x_1 + x_2 + (-2+i)x_3 + 2ix_4 = 4+5i, \\ x_1 + 2ix_2 + (-1+i)x_3 + (2+i)x_4 = 3. \end{cases}$$

Rezolvare:

Scriem matricea extinsă a sistemului și o reducem la forma eșalon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2i & -1 & 1+i & 3+2i \\ 2 & 1 & -2+i & 2i & 4+5i \\ 1 & 2i & -1+i & 2+i & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & 2i & -1 & 1+i & 3+2i \\ 0 & 1-4i & i & -2 & -2+i \\ 0 & 0 & i & 1 & -2i \end{pmatrix}$$

Obținem sistemul trapezic respectiv:
$$\begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 3+2i, \\ (1-4i)x_2 + ix_3 - 2x_4 = -2+i, \\ ix_3 + x_4 = -2i. \end{cases}$$

Declarăm necunoscute principale x_1, x_2, x_4 , iar x_3 – necunoscută secundară și

rezolvăm sistemul
$$\begin{cases} x_1 + 2ix_2 + (1+i)x_4 = 3+2i + x_3 \\ (1-4i)x_2 - 2x_4 = -2+i - ix_3 \\ x_4 = -2i - ix_3 \end{cases}$$
 în necunoscutele x_1, x_2, x_4 .

Notând $x_3 = \alpha$, obținem soluția generală $x_1 = \frac{1}{17}(-5+48i-(6+7i)\alpha)$,

$x_2 = \frac{1}{17}(10-11i+(12-3i)\alpha)$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = -2i-i\alpha$.

Răspuns: $S = \left\{ \left(\frac{1}{17}(-5+48i-(6+7i)\alpha), \frac{1}{17}(10-11i+(12-3i)\alpha), \alpha, -2i-i\alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

Observație. Soluția generală nu este univoc determinată, deoarece ea depinde de șirul de transformări elementare aplicate pentru a obține un sistem trapezic din cel dat, de necunoscutele principale selectate. Însă în toate soluțiile generale, în expresiile din membrii din dreapta, figurează același număr de necunoscute secundare ($n-r$), n fiind numărul necunoscutelor și r – numărul de linii nenule ale matricei eșalon.

De exemplu, dacă în exercițiul 1 numim x_1, x_3 necunoscute principale, atunci, notând $x_2 = \alpha$, avem sistemul
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 2 - 2\alpha \\ 3x_3 = 2 + \alpha, \end{cases}$$
 de unde obținem soluția generală
$$x_1 = \frac{1}{3}(10 - 4\alpha), \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \frac{1}{3}(2 + \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

3.4. Sisteme de ecuații liniare omogene

Sistemul de ecuații liniare (1) se numește **omogen** dacă termenii liberi ai tuturor ecuațiilor sunt 0. Forma generală a unui sistem de m ecuații liniare omogene cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Observație. Matricea extinsă a sistemului omogen se deosebește de matricea sistemului printr-o coloană nulă (ultima), de aceea numărul de linii nenule ale matricelor eșalon obținute din ele este același.

Aplicând rezultatele obținute anterior, obținem fără dificultate următoarele *propoziții*:

1. Orice sistem omogen de ecuații liniare este compatibil, având cel puțin soluția nulă:
 $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

2. Dacă numărul liniilor nenule ale matricei eşalon obținute din matricea sistemului (8) este egal cu numărul n al necunoscutelor, atunci sistemul este compatibil determinat, cu soluția unică nulă: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

3. Dacă numărul liniilor nenule ale matricei eşalon obținute din matricea sistemului (8) este mai mic decât numărul necunoscutelor, atunci sistemul este compatibil nedeterminat. În particular, aceasta are loc în cazul în care numărul ecuațiilor sistemului inițial este mai mic decât numărul necunoscutelor sau dacă $m = n$ și determinantul matricei sistemului este egal cu 0.

Exercitiu rezolvat

Exercițiul rezolvat

🔗 Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul de ecuații

Rezolvare:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare:

Reducem matricea sistemului la forma esalon:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 24 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-4 \times R_1 \rightarrow R_2 \\ -3 \times R_1 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 18 \\ 0 & -5 & -30 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3} \times R_2 \rightarrow R_2 \\ -\frac{1}{5} \times R_3 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul respectiv are forma
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

E comod să numim principale necunoscutele x_1 și x_2 . Notăm necunoscuta secundară $x_3 = \alpha$ și rezolvăm sistemul $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -6\alpha \\ x_2 = -6\alpha \end{cases}$ în necunoscutele x_1, x_2 . Obținem soluția generală: $x_1 = 8\alpha, x_2 = -6\alpha, x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

Răspuns: $S = \{(8\alpha, -6\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{C}\}.$

Exerciții propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A 1.** Să se determine care dintre tripletele de numere sunt soluții ale sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x + 2y + z = -1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \quad (\text{necunoscutele se ordonează } (x, y, z)):$$

- a) (0, 0, 0); b) (1, 1, 1); c) (0, -1, 1); d) (3, 1, 0).

- 2.** Să se rezolve în **C**, aplicând metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 4x + 3y = 7, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ x + 2y = -1; \end{cases}$	c) $\begin{cases} -x + 3y = 5, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$
d) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x + 3y = 1; \end{cases}$	e) $\begin{cases} 4x + 4y - 2z = 2, \\ 2x + 4y - z = 1, \\ 2x - z = 1; \end{cases}$	f) $\begin{cases} 2y + 6z = 12, \\ x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 4; \end{cases}$
g) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 4z = -7, \\ x + 2y - 2z = 7; \end{cases}$	h) $\begin{cases} 3y + 5z = -4, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + 3y + z = 5. \end{cases}$	

- B 3.** **Lucrați în perechi!** Petru a achitat pentru o tartină și o ceașcă de cafea 8,5 u.m., iar colegul său a plătit pentru o cafea și 2 tartine 13 u.m. Să se determine prețul unei tartine și al unei cești de cafea, compunând un sistem de ecuații liniare.

- 4.** Aplicând operațiile de adunare, scădere membru cu membru a ecuațiilor sistemului, arătați că sistemul a) este compatibil nedeterminat, iar b) – incompatibil.

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 1. \end{cases}$

- C 5.** **Investigați!** Trei antreprenori, A_1 , A_2 , A_3 , procură acțiuni de la trei fonduri diferite.

Numărul de acțiuni procurate de la fiecare fond și suma achitată (u.m.) sunt date în tabel:

	F_1	F_2	F_3	Suma
A_1	3	3	2	52,9
A_2	1	2	1	24,6
A_3	1	1	2	24,3

- a) Să se compună un sistem de ecuații liniare cu ajutorul căruia se pot afla prețurile acțiunilor de la fiecare fond.
b) Ce se poate spune despre prețurile acțiunilor, dacă al treilea antreprenor cumpără de la F_1 , F_2 , F_3 trei, trei și respectiv două acțiuni, achitând 77,2 u.m.?
- 6.** Sistemul de ecuații din **2 e)** are o unică soluție. Schimbând doar o ecuație, să se obțină un sistem: a) incompatibil; b) compatibil nedeterminat.

Profilul real

- A₁ 1.** Să se determine care dintre tripletele de numere sunt soluții ale sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases} \quad (\text{necunoscutele se ordonează } (x, y, z)):$$

- a) (0, 0, 0); b) (1, 1, 1); c) (0, -1, 1); d) (3, 1, 0).

2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$, aplicând metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 2x - y = 1; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y = 0, \\ x + 2y = -1; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -2x + y = 0, \\ x + 2y = 5; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + 3y = 1; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} -x + 8y + 3z = 2, \\ 2x + 4y - z = 1, \\ 2x - z = 1; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x + 4y + 9z = 16, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ x + 2y + 3z = 4; \end{cases} \\ \text{g)} \begin{cases} x + 4z = -7, \\ -2x + y + 3z = -7, \\ x + 2y - 2z = 7; \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} 2x + 4y + 6z = -2, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + 3y + z = 5. \end{cases} \end{array}$$

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, prin metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + ix_2 + 2x_3 = i, \\ x_2 + (2-i)x_3 = 0; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases} \end{array}$$

4.  **Lucrați în perechi!** Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul omogen (efectuând studiul în funcție de $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

B₁ 5. a) Nelu a achitat pentru 3 tartine și 2 cești de cafea 21,5 u.m., iar colegul său a plătit pentru o cafea și 2 tartine 13 u.m. Să se determine prețul unei tartine și al unei cești de cafea, compunând un sistem de ecuații liniare.

b) Altă dată Nelu a achitat pentru 2 chifle, un ceai și 2 prăjituri 20 u.m., iar colegul său a plătit pentru o chiflă, un ceai și 3 prăjituri 22 u.m. Să se compună un sistem de ecuații corespunzător acestei situații. Se pot determina prețurile produselor cumpărate? De ce?

6. Să se stabilească dacă este compatibil sistemul:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 1; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = \lambda, \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

7. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemele compatibile din exercițiul 6.

8. Să se determine toate matricele X pentru care $AX = XA$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

C₁ 9.  **Investigați!** Trei antreprenori, A_1 , A_2 , A_3 , procură acțiuni de la trei fonduri diferite. Numărul de acțiuni procurate de la fiecare fond și suma achitată (u.m.) sunt date în tabel:

	F_1	F_2	F_3	Suma
A_1	2	1	1	28,3
A_2	1	2	1	24,6
A_3	1	1	2	24,3

- a) Să se compună un sistem de ecuații liniare cu ajutorul căruia se pot afla prețurile acțiunilor de la fiecare fond.
 b) Ce se poate spune despre prețurile acțiunilor, dacă al treilea antreprenor cumpără de la F_1 , F_2 , F_3 trei, trei și respectiv două acțiuni, achitând 77,2 u.m.?
10. Sistemul de ecuații din 1 are o unică soluție. Schimbând doar o ecuație, să se obțină un sistem: a) incompatibil; b) compatibil nedeterminat.
11. Să se determine toate matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
12.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale elementelor de algebră superioară în diverse domenii.*

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport

- A 1. Să se calculeze:

a) $A - iB$; b) $iA + B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 2 & 3i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & i+1 \end{pmatrix}$.

2. 1) Să se determine care produs există și să se determine tipul matricei-produs respective:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 3)$; c) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ -3i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ i & 0 \end{pmatrix}$;

d) $(2 \ -4 \ 5) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- 2) Să se afle produsele din 2.1).

3.  **Investigați!** Să se determine valorile $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care este adevărată egalitatea:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2x-3y \\ -7x+6y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-x-11 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} y+3x & -1 \\ 3 & y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Să se calculeze determinantul matricei A :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & -2i \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -3 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b-a & c-b & a-c \\ b & c & a \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2i & 3i & -2i \end{pmatrix}$;

g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, aplicând metoda lui Cramer, sistemul de ecuații:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 3x_1 - x_2 = 5; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 - i, \\ 2x_1 - ix_2 = i; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} 2x_2 + 5x_3 - 6x_1 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12; \end{cases} \\ \text{g)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 17, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 12. \end{cases} \end{array}$$

B 6. Să se calculeze $A^2 - 5A + 7I_2$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.  **Lucrați în perechi!** Să se determine tipul matricei X care satisface egalitatea

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Un elev are o colecție de gândaci și păianjeni, în total 8 insecte. Gândacii au câte 6 picioare, iar păianjenii – câte 8. Câți gândaci și câți păianjeni sunt în colecție, dacă insectele au în total 54 de picioare?

C 9. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 4 - \alpha \\ \alpha x_1 + 4x_2 = 4, \end{cases} \alpha \in \mathbb{C}$, are o unică soluție.

10. În două vase se află soluție de același acid, dar de diferită concentrație: în primul vas sunt 15 l, iar în al doilea – 10 l de soluție. Dacă se amestecă aceste cantități de soluție, se obține o soluție cu o concentrație de 42 % de acid. Dacă se vor lua aceste soluții în cantități egale, se va obține o soluție cu o concentrație de 50 % de acid. Ce cantitate de acid este în fiecare vas?

11. Trei persoane au plasat capitalul disponibil cu dobânzile anuale de 2 %, 2,5 % și respectiv 3 %. Peste un an, ei au obținut în total 265 u.m. dobândă. Persoana a doua a primit o dobândă cu 35 u.m. mai mare decât prima. Dacă tot capitalul ar fi fost plasat cu dobânda de 2,5 % anual, atunci dobânda ar fi constituit 250 u.m. Să se determine suma plasată de fiecare persoană.

Profilul real

- A₁** 1. Să se calculeze:

a) $3A - 2iB$; b) $iA + 2B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 2 & 3i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & i+1 \end{pmatrix}$.

2. 1) Să se determine care produs există și să se determine tipul matricei-produs respective:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3)$; c) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -3i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

- 2) Să se afle produsele din 2.1).

3. Să se determine valorile parametrilor $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ pentru care sunt adevărate egalitățile:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -x & y \\ u+1 & v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 3v & 1-2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Să se calculeze determinantul matricei A :

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3i & -2i \end{pmatrix}; & \text{b) } A &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -3 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}; & \text{c) } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; & \text{d) } A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \\ \text{e) } A &= \begin{pmatrix} a+b & b-a & b \\ b+c & c-b & c \\ c+a & a-c & a \end{pmatrix}; & \text{f) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2i \\ 2 & 1 & 3i \\ 4 & 5 & -2i \end{pmatrix}; & \text{g) } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; & \text{h) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. 1) Să se determine compatibilitatea sistemului:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 3x_1 - x_2 = 5; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 = 1, \\ 2x_1 - ix_2 = i; \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 4x_1 + 8x_2 - 11x_3 = 17, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \end{cases} \\ \text{e) } \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12; \end{cases} \\ \text{g) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 3x_3 = 10; \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases} \end{aligned}$$

2) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemele de ecuații din 5.1).

6. Să se calculeze determinantul matricei A :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Să se calculeze inversele matricelor A din exercițiul 4 (dacă există).

8. Să se calculeze inversele matricelor A din exercițiul 6 (dacă există).

9. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe, aplicând metoda lui Cramer sau metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 7; \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

10. În două vase se află soluție de același acid, dar de diferită concentrație: în primul vas sunt 75 l, iar în al doilea – 50 l. Dacă se amestecă aceste cantități, se obține o soluție cu o concentrație de 42 % de acid. Dacă se vor lua aceste soluții în cantități egale, se va obține o soluție cu o concentrație de 50 % de acid. Ce cantitate de acid este în fiecare vas?

B₁ 11. Să se calculeze $A^2 - 5A + 7I_2$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Să se determine tipul matricei X care satisface egalitatea $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$.

13. Să se determine valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{C}$ pentru care sistemul are doar soluția nulă:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

14. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația: a) (BAC, 2012) $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 3$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$.

15.  **Investigați!** Să se determine compatibilitatea (în funcție de $\lambda \in \mathbb{C}$) și să se rezolve sistemul omogen:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ \lambda x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

16. Distanța dintre două orașe este de 90 km. Doi bicicliști pornesc din aceste orașe unul spre celălalt. Dacă primul se pornește cu 2 ore mai devreme decât al doilea, atunci ei se vor întâlni peste 2,5 ore după ce a plecat al doilea biciclist. Dacă al doilea biciclist se va porni cu 2 ore mai devreme decât primul, atunci ei se vor întâlni peste 3 ore după ce a plecat primul. Care este viteza fiecărui biciclist?

- C₁** 17. Fie o matrice pătratică A de ordinul 3 cu elementele $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Să se determine valoarea cea mai mare a $\det A$.

18. Să se determine $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Fie o matrice pătratică A , de ordinul 3, ale cărei elemente $a_{ij} \in \{-1, 1\}$.

a) Să se arate că $\det A$ este un număr par.

b) Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua $\det A$.

20. Se poate arăta că volumul paralelipipedului $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$, unde $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_4(x_3, y_3, z_3)$, $A'_1(x_4, y_4, z_4)$, se calculează conform formulei:

$$V = \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Să se calculeze volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A'_1}$, dacă $A_1(1, 1, 1)$, $A_2(1, 2, 2)$, $A_4(0, 4, 2)$, $A'_1(5, 6, 8)$.

21.  **Lucrați în perechi!** Să se determine o matrice X , $X \neq I_3$, care comută cu matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Să se discute compatibilitatea sistemului $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 4 - \alpha \\ \alpha x_1 + 4x_2 = 4, \end{cases} \alpha \in \mathbb{C}$, în funcție de valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$.
23. Trei persoane au plasat capitalul disponibil cu dobânzile anuale de 4 %, 5 % și respectiv 6 %. Peste un an, au obținut în total 530 u.m. dobândă. Persoana a doua a primit o dobândă cu 70 u.m. mai mare decât prima. Dacă tot capitalul ar fi fost plasat cu dobânda de 5 % anual, atunci dobânda ar fi constituit 500 u.m. Să se determine suma plasată de fiecare persoană.
24. Să se determine matricea X care verifică egalitatea $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
25. (BAC, 2018) Să se afle valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $\begin{pmatrix} \alpha^2 - x & \alpha^2 + |x| \\ 1 & \alpha^2 + x \end{pmatrix}$ este inversabilă $\forall x \in \mathbb{R}$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilurile umanist, arte, sport

1. 1) Determinați expresia a cărei valoare poate fi calculată: ②
- a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2$ ④
- 2) Calculați valorile expresiilor din 1. 1). ④
2. a) Argumentați că este posibil de aplicat regula lui Cramer pentru rezolvarea sistemului: ④
- $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$
- b) Rezolvați sistemul aplicând regula lui Cramer. ⑧
3. Fie $\mathcal{M}$ matricea sistemului din 2 a). Calculați $\mathcal{M}^3$. ⑩
4. Trei fermieri, A, B, C , utilizează serviciul „Deservire la domiciliu” oferit de 4 magazine, M_1, M_2, M_3, M_4 . Prețurile (u.m.) pentru transportarea produselor de la magazin la fiecare fermier sunt indicate în următoarea matrice: $T = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$ ⑧
- Începând cu luna viitoare, magazinele au decis să micșoreze prețurile pentru transport cu 5 %. Folosind operația de înmulțire a matricei cu un scalar, aflați prețurile noi.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilul real

1. 1) Determinați expresia a cărei valoare poate fi calculată:

a) $i \cdot \begin{pmatrix} 3i & 2-i & 7+2i \\ 3-i & 0 & 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & i-1 & 7-i \\ i-1 & 2 & 3+i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-i & -1+i \\ 3i & 2+i \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \sqrt{3} \\ i & \pi \end{pmatrix}^3$.

- 2) Calculați valorile expresiilor din 1. 1).

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

- a) Indicați litera corespunzătoare variantei corecte.

$|A|$ este egal cu **A** 1. **B** 0. **C** -4. **D** 6.

- b) Calculați A^{-1} , dacă există.

c) Rezolvați ecuația $XA = B$, dacă $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. a) Determinați compatibilitatea sistemului $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

- b) În cazul în care sistemul este compatibil, determinați soluția generală și o soluție particulară.

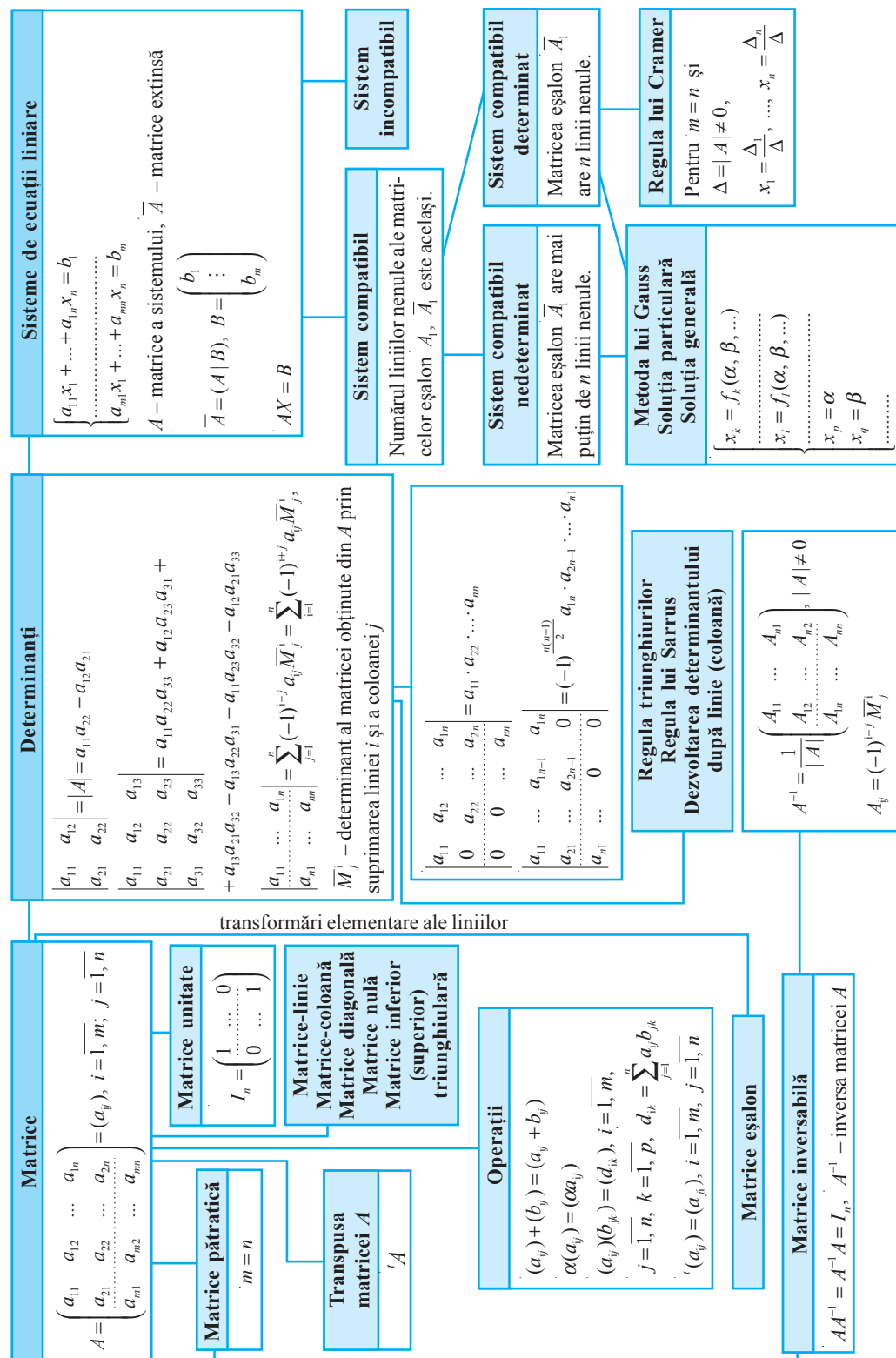
4. Proprietarul unui iaz pune în vânzare pește proaspăt în containere de 3 tipuri: C_1, C_2, C_3 . Managerii M_1, M_2, M_3 de la 3 restaurante au procurat diferite cantități de pește și au achitat sumele (u.m.) indicate în tabel:

	C_1	C_2	C_3	Suma
M_1	1	2	1	2 700
M_2	2	1	1	3 350
M_3	1	2	2	3 100

Aflați prețul fiecărui container compunând și rezolvând un sistem de ecuații.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	36–35	34–31	30–27	26–22	21–16	15–11	10–7	6–4	3–2	1–0



Paralelismul dreptelor și planelor

Obiective

- ⇒ identificarea în diverse contexte și utilizarea axiomelor, definițiilor și teoremelor specifice geometriei în spațiu în diverse contexte;
- ⇒ identificarea în situații reale și/sau modelate și construirea dreptelor concurente, necoplanare, paralele;
- ⇒ identificarea în diverse contexte a pozițiilor relative a două drepte în spațiu, ale dreptei și planului, ale planelor;
- ⇒ construirea dreptelor ce intersectează planul, a planelor ce se intersectează și a planelor paralele;
- ⇒ aplicarea criteriilor de paralelism al dreptelor, al dreptei cu planul și a două plane în diferite contexte;
- ⇒ utilizarea paralelismului dreptelor și planelor pentru a identifica și explica procese, fenomene din diverse domenii.

§1 Axiomele geometriei în spațiu

În geometria în spațiu, ca și în geometria în plan, noțiunile și proprietățile figurilor se stabilesc prin definiții, axiome și teoreme. În spațiu, pe lângă noțiunile fundamentale deja cunoscute: *punct*, *dreaptă*, *distanță* și *măsură a unghiurilor*, apare și noțiunea *plan*. Prin urmare, sistemul de axiome ale geometriei în plan necesită o extindere.

Vom completa grupul de axiome ale geometriei în plan cu trei axiome care exprimă proprietățile fundamentale ale punctelor, dreptelor și planelor în spațiu:

- S_1 Oricare ar fi planul, există puncte care aparțin acestui plan și puncte care nu-i aparțin (fig. 8.1 a)).
- S_2 Trei puncte necoliniare determină un plan și numai unul (fig. 8.1 b)).
- S_3 Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci intersecția lor este o dreaptă (fig. 8.1 c)).

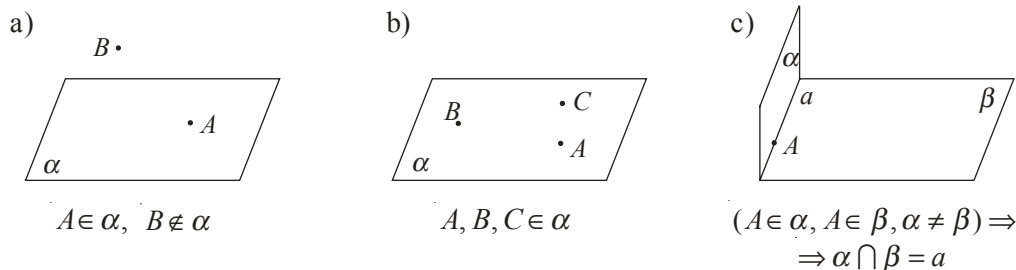


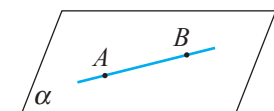
Fig. 8.1

În baza acestor axiome pot fi demonstrate următoarele teoreme:

Teorema 1. Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci orice punct al dreptei aparține acestui plan (fig. 8.2 a)).

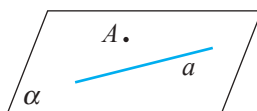
Teorema 2. O dreaptă și un punct ce nu aparține acestei drepte determină un unic plan (fig. 8.2 b)).

Teorema 3. Două drepte concurente determină un unic plan (fig. 8.2 c)).



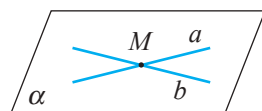
$A, B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$

a)



$A \notin a \Rightarrow$ punctul A și dreapta a determină planul α

b)



$a \cap b = \{M\} \Rightarrow$ dreptele a și b determină planul α

c)

Fig. 8.2

Planul se notează cu literele mici ale alfabetului grecesc: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Planul determinat de o dreaptă d și un punct A se notează (A, d) sau (d, A) . Planul determinat de punctele necoliniare A, B, C se notează (ABC) .

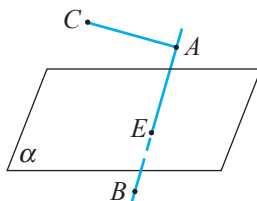
Punctele care aparțin unui plan se numesc **puncte coplanare**, în caz contrar – **necoplanare**.

Teorema 4 (de separare a spațiului). Orice plan α împarte mulțimea punctelor spațiului în două submulțimi nevide disjuncte de puncte, astfel încât pentru orice două puncte A, B din submulțimi diferite, segmentul AB intersectează planul α , iar pentru orice două puncte C, A din aceeași submulțime, segmentul CA nu intersectează planul α (fig. 8.3).

Definiții. • Fiecare dintre submulțimile din teorema 4 se numesc **semispații deschise** determinate de planul α , numit **frontiera semispațiului**.

• Reuniunea semispațiului deschis cu frontiera sa se numește **semispațiu închis**.

Se notează: (αA) – semispațiul deschis cu frontiera α și care conține punctul A ; $[\alpha A)$ – semispațiul închis cu frontiera α și care conține punctul A (fig. 8.3).



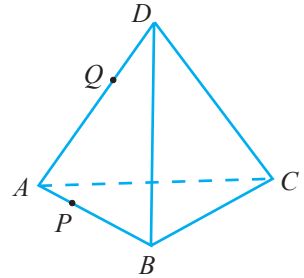
$C \in (\alpha A, [CA] \cap \alpha = \emptyset, B \notin (\alpha A, [AB] \cap \alpha = \{E\}$

Fig. 8.3

Probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Este posibil ca numai trei vârfuri ale unui paralelogram să aparțină unui plan?
 2. Centrul unui cerc și două puncte de pe cerc aparțin unui plan.
 Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:
 „Orice punct al cercului aparține acestui plan”. **A / F**
3.  **Investigați!** Poate oare o dreaptă să aibă cu un plan exact:
 a) două puncte comune;
 b) 2 020 de puncte comune;
 c) un punct comun?
- B** 4. Fie $DABC$ un tetraedru, $P \in (AB)$, $Q \in (AD)$. Să se construiască după figura alăturată liniile de intersecție a planelor:
 a) ABD și CPQ ;
 b) CPQ și ABC ;
 c) CPQ și ADC .
5. Se dau trei drepte care au un punct comun și nu sunt situate în același plan. Să se determine numărul de plane determinate de aceste drepte.
6.  **Lucrați în perechi!** Fie patru puncte necoplanare. Să se afle:
 a) numărul de drepte determinate de aceste puncte;
 b) numărul de plane determinate de aceste puncte.
7. Câte puncte comune poate avea un plan cu:
 a) un segment; b) o semidreaptă; c) un cerc?
8. Trei puncte arbitrare ale unui dreptunghi aparțin unui plan. Aparține oare dreptunghiul acestui plan?
- C** 9. Lungimea fiecărei muchii a tetraedrului $ABCD$ este a . Să se afle aria triunghiului APQ , dacă P este mijlocul muchiei BD , iar Q – mijlocul muchiei DC .
10.  **Investigați!** Se dau patru drepte care au un punct comun, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coplanare. Să se determine numărul de plane determinate de aceste drepte.
11.  **Investigați!** Fie cinci puncte, astfel încât oricare patru nu sunt coplanare. Să se determine:
 a) numărul de drepte determinate de aceste puncte;
 b) numărul de plane determinate de aceste puncte.



Profilul real

- A₁** 1. Dreptele a și b nu se intersectează și sunt situate în același plan. Să se arate că dacă dreapta a intersectează un plan α , atunci și dreapta b intersectează acest plan.
2. Dreptele d_1 , d_2 și d_3 sunt concurente două câte două în puncte diferite. Să se demonstreze că aceste drepte sunt situate în același plan.
3. Punctul A nu aparține planului determinat de punctele necoliniare B, C, D . Să se demonstreze că dreptele AD și CB nu sunt conținute de același plan.

- B₁** 4. Fie patru puncte ce nu aparțin unuia și aceluiași plan. Să se demonstreze că oricare trei puncte din cele date nu sunt coliniare.
5.  **Lucrați în perechi!** Fie α și β plane distincte. Să se arate că există cel puțin o dreaptă neinclusă în nici unul dintre cele două plane.
6. Dreptele AB și CD nu sunt situate în același plan. Să se arate că și dreptele AC și BD nu sunt situate în același plan.
- C₁** 7. Dreptele AB și CD sunt neconcurente. Să se arate că există un unic plan ce conține dreapta AB și care este paralel cu dreapta CD .
8. Punctele A, B, C, D aparțin și planului α , și planului β . Să se demonstreze că aceste puncte sunt coliniare, dacă se știe că planele α și β sunt distincte.
9.  **Lucrați în perechi!** Fie α și β plane care se intersectează după dreapta a , iar punctele A, B aparțin planului α și sunt separate de dreapta a . Să se arate că planul β separă punctele A și B .

§2 Pozițiile relative a două drepte în spațiu

Fie dreptele a și b în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative a două drepte în spațiu:

- dreptele a și b au două puncte comune diferite (în acest caz, dreptele coincid, fiindcă două puncte diferite determină o dreaptă și numai una);
- dreptele a și b au un unic punct comun (în cazul dat, dreptele se numesc **concurente** în acest punct) (fig. 8.4);
- dreptele a și b sunt situate în același plan și nu au puncte comune (fig. 8.5);
- dreptele a și b nu se află în același plan. Astfel de drepte se numesc **necoplanare** (fig. 8.6).

În cazurile a), b), c) dreptele a, b se numesc **coplanare** (fig. 8.4, 8.5).

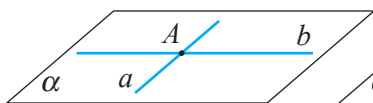


Fig. 8.4

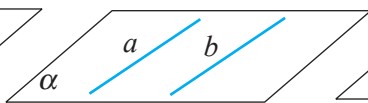


Fig. 8.5

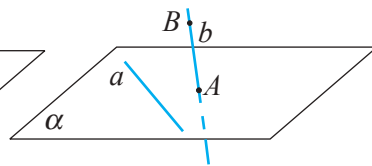


Fig. 8.6

Existența dreptelor necoplanare se demonstrează astfel:

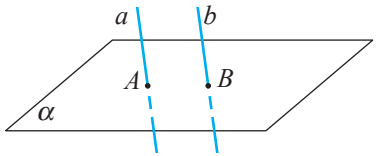
În spațiu există un plan α și un punct B ce nu aparține acestui plan. În planul α există o dreaptă a și un punct A ce nu aparține acestei drepte (fig. 8.6). Punctele distincte A și B determină dreapta b , care este necoplanară cu dreapta a .

Definiție. Două drepte în spațiu se numesc **paralele** dacă ele sunt situate în același plan și nu au puncte comune sau dacă coincid (fig. 8.5).

Observație. Dacă două drepte distincte în spațiu nu au puncte comune, aceasta înseamnă că ele sunt paralele (fig. 8.6). Pentru a confirma că două drepte distincte sunt paralele în spațiu, trebuie să verificăm dacă ele sunt situate într-un plan și nu au puncte comune.

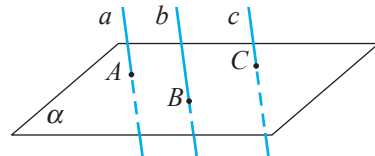
Teorema 5. Dacă una dintre două drepte distincte paralele intersectează un plan, atunci și cealaltă dreaptă intersectează acest plan (fig. 8.7).

Teorema 6. Dacă două drepte sunt paralele cu o a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele (fig. 8.8).



$$(a \parallel b, a \cap \alpha = \{A\}) \Rightarrow b \cap \alpha \neq \emptyset$$

Fig. 8.7



$$(a \parallel b, a \parallel c) \Rightarrow b \parallel c$$

Fig. 8.8

Exercițiu. Demonstrați teoremele 5 și 6.

Probleme rezolvate

1. Fie punctele necoplanare A, B, C, D . Să se demonstreze că mijloacele segmentelor AD, DC, CB și BA sunt vârfurile unui paralelogram.

Rezolvare:

Fie M, N, P și Q mijloacele segmentelor AD, DC, CB și respectiv BA (fig. 8.9). Atunci $[MQ]$ este linie mijlocie a triunghiului ABD , de unde rezultă că $[MQ] \parallel [DB]$, iar $[NP]$ este linie mijlocie a triunghiului BDC , deci $[NP] \parallel [DB]$. Conform teoremei 6, $[MQ] \parallel [NP]$. În mod analog se demonstrează că $[MN] \parallel [QP]$. Prin urmare, laturile opuse ale patrulaterului $MNPQ$ sunt paralele, ceea ce demonstrează că el este un paralelogram.

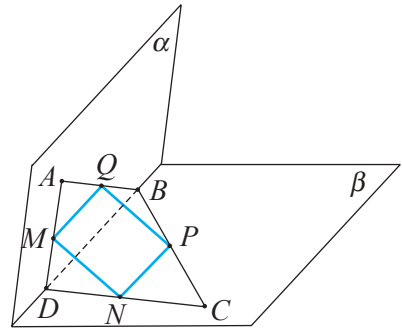


Fig. 8.9

2. Fie punctele necoplanare A, B, C, D . Punctul $E \in (AB)$, iar punctul $F \in (DC)$ (fig. 8.10).

Să se arate că:

- punctele E și F sunt distincte;
- dreptele EF și AD, EF și BC, EF și AC, EF și BD sunt necoplanare.

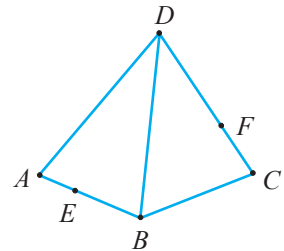


Fig. 8.10

Rezolvare:

a) Dacă am presupune că E și F ar coincide, ar rezulta că dreptele AB și CD sunt concurente în punctul E . Aceasta ar însemna că punctele A, B, C, D sunt coplanare, ceea ce contrazice condiția problemei.

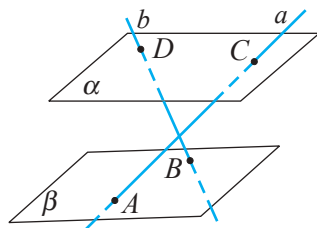
b) Fie dreptele EF și AD coplanare. Atunci punctele A, E, F, D sunt coplanare și cum $B \in (AE)$, $C \in (DF)$, rezultă că punctele A, B, C și D aparțin aceluiași plan, dar aceasta contrazice condiția problemei.

Raționamente asemănătoare se aplică la demonstrarea necoplanarității celorlalte perechi de drepte.

Probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Dreapta d intersectează dreptele distincte d_1 și d_2 . Rezultă de aici că dreptele d, d_1 și d_2 aparțin aceluiași plan?
2. Dreapta a intersectează planul α . Dreapta b este paralelă cu dreapta a . Va intersecta dreapta b planul α ?
- B** 3.  **Investigați!** Dreptele a și b sunt paralele, iar dreapta c intersectează dreapta b . Să se determine în ce relație sunt dreptele a și c .
- C** 4. Prin vârfurile unui paralelogram sunt construite patru drepte paralele care nu sunt situate în planul paralelogramului. Să se arate că punctele de intersecție a oricărui plan cu aceste patru drepte sunt vârfurile unui paralelogram.
5.  **Lucrați în perechi!** În figură, planele α și β sunt paralele ($AB \parallel DC$). Să se determine poziția relativă a dreptelor a și b .



Profilul real

- A₁** 1. Fie două drepte paralele și una dintre ele paralelă cu un plan. Să se demonstreze că și cealaltă dreaptă este paralelă cu acest plan.
2. Fie o dreaptă paralelă cu două plane care se intersectează. Să se demonstreze că această dreaptă este paralelă cu dreapta de intersecție a acestor plane.
- B₁** 3.  **Investigați!** Dreptele d_1 și d_2 sunt necoplanare, iar dreapta d este paralelă cu dreapta d_1 . În ce relație sunt dreptele d și d_2 ?
4.  **Investigați!** Intersecția planelor α și β este dreapta d . Punctul $A \in \alpha$ și $A \notin d$, punctul $B \in \beta$ și $B \notin d$. În ce relație sunt dreptele d și AB ?
- C₁** 5.  **Investigați!** Dreptele a și b sunt paralele, iar dreptele c și b sunt necoplanare. În ce relație pot fi dreptele c și a ?
6. Punctul A nu aparține dreptei d . Prin punctul A se construiesc toate dreptele necoplanare cu dreapta d . Să se determine reuniunea dreptelor construite.

§3 Drepte și plane

Fie o dreaptă și un plan în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative ale unei drepte și unui plan în spațiu:

- a) dreapta are un unic punct comun cu planul (vom spune că planul și dreapta **se intersectează** sau dreapta este **secantă** cu planul) (fig. 8.11 a));
- b) dreapta nu are niciun punct comun cu planul (fig. 8.11 b));
- c) dreapta este inclusă în plan (fig. 8.11 c)).

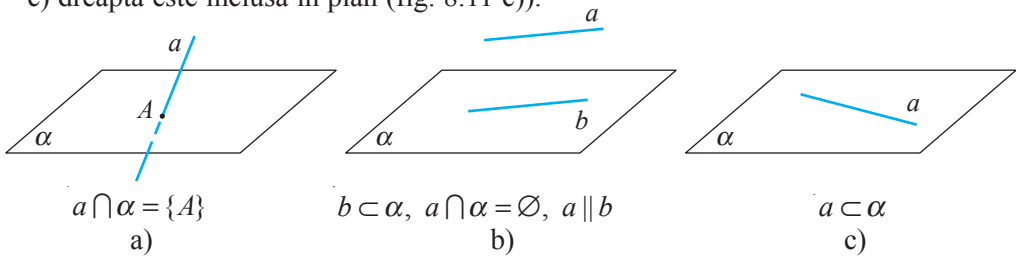


Fig. 8.11

Definiție. O dreaptă se numește **paralelă** cu un plan dacă ea nu are puncte comune cu acest plan sau dacă este inclusă în acest plan.

În figurile 8.11 b), c), dreapta a este paralelă cu planul α .

Teorema 7 (criteriul de paralelism al dreptei și planului). Pentru ca o dreaptă să fie paralelă cu un plan este necesar și suficient ca dreapta să fie paralelă cu o dreaptă din acest plan.

Demonstrație

Necesitatea. Fie dreapta a ($a \not\subset \beta$) paralelă cu planul β . Considerăm în planul β un punct A , apoi construim planul α determinat de acest punct și de dreapta a (fig. 8.12). Planele α și β se intersectează după dreapta b . Constatăm că dreptele a și b sunt paralele, deoarece, în caz contrar, ele, fiind situate în planul α , ar avea un punct comun, care ar aparține și planului β , ceea ce ar contrazice ipoteza că $a \parallel \beta$.

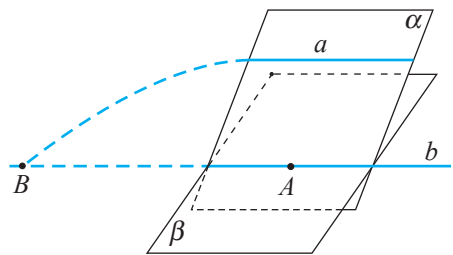
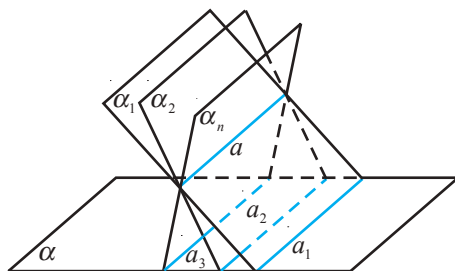


Fig. 8.12

Suficiența. Fie dreapta a ($a \not\subset \beta$) paralelă cu o dreaptă b inclusă în planul β . În acest caz, dreapta a este paralelă și cu planul β . Într-adevăr, dacă vom presupune că dreapta a ar avea un punct comun, B , cu planul β , atunci acest punct ar trebui să aparțină și liniei de intersecție a planelor β și α (fig. 8.12), adică și dreptei b , dar aceasta ar contrazice ipoteza că $a \parallel b$.

Cazul $a \subset \beta$ este evident. ►

Teorema 8. Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci intersecția acestui plan cu orice alt plan, care nu este paralel cu cel dat și trece prin dreapta dată, este o dreaptă paralelă cu dreapta dată (fig. 8.13).



$$(a \parallel \alpha, a \subset \alpha_i, \alpha_i \nparallel \alpha) \Rightarrow \alpha_i \cap \alpha = a_i \parallel a \quad (i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^*)$$

Fig. 8.13

Exercițiu. Demonstrați teorema 8.

Teorema 8' (teorema „acoperișului”).

Fie dreptele paralele d_1 și d_2 . Dacă un plan ce conține dreapta d_1 este secant unui plan ce conține dreapta d_2 , atunci dreapta d de intersecție a acestor plane este paralelă cu dreptele d_1 și d_2 (fig. 8.14).

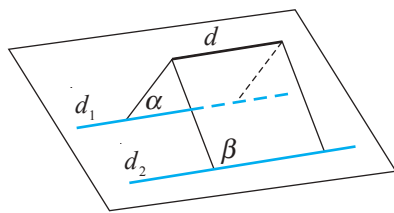


Fig. 8.14

Probleme rezolvate

1. Considerăm punctul E care nu aparține planului paralelogramului $ABCD$ și punctul F – mijlocul segmentului AE . Să se arate că dreapta FC intersectează planul BED în centrul de greutate G al triunghiului BED (fig. 8.15).

Rezolvare:

Fie planul EAC . Punctul F și mijlocul O al diagonalei AC a paralelogramului $ABCD$ aparțin acestui plan. Prin urmare, punctul G de intersecție a medianelor CF și EO ale triunghiului EAC aparține planului EAC . Cum segmentul EO este mediană și a triunghiului BED , rezultă că $(FC) \cap (BED) = \{G\}$.

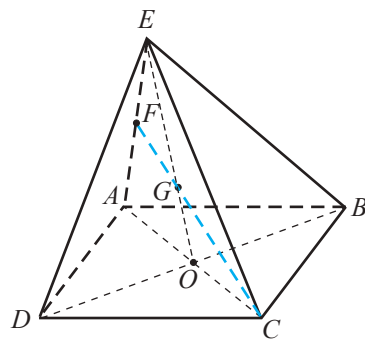


Fig. 8.15

2. Fie punctele necoplanare A, B, C, D . Punctele E, F și G aparțin segmentelor AD, DC și respectiv BC , fără a coincide cu extremitățile lor și, în plus, $\frac{DE}{EA} \neq \frac{DF}{FC}$ (fig. 8.16 a). Să se reprezinte intersecțiile planului EFG cu planele ADC, DBC, ABC și ABD .

Rezolvare:

Evident, intersecțiile planului EFG cu planele ADC și DBC sunt dreptele EF și respectiv FG (fig. 8.16 b)).

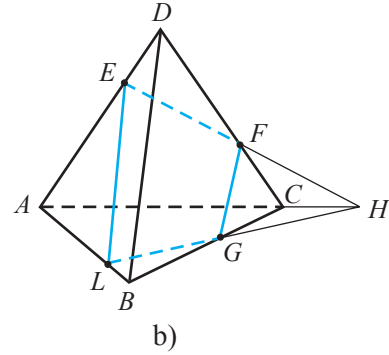
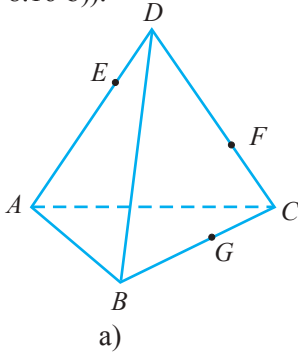


Fig. 8.16

Fie dreptele EF și AC se intersectează în punctul H . Acest punct există, deoarece $\frac{DE}{EA} \neq \frac{DF}{FC}$. Punctul H aparține planului EFG și planului ABC . Prin urmare, dreapta HG este dreapta de intersecție a planelor EFG și ABC . Fie $HG \cap AB = \{L\}$. Atunci dreapta EL este dreapta de intersecție a planelor EFG și ADB .

3. Fie d_1 și d_2 drepte concurente situate în planul α , iar d o dreaptă ce intersectează planul α într-un punct D ce nu aparține dreptelor d_1 și d_2 (fig. 8.17). Să se determine mulțimea dreptelor care intersectează dreptele d , d_1 și d_2 .

Rezolvare:

Fie O punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2 . Orice dreaptă care trece prin punctul O și printr-un punct A al dreptei d verifică condițiile problemei. De asemenea, orice dreaptă din planul α care trece prin punctul D și intersectează ambele drepte d_1 și d_2 verifică condițiile problemei. Alte drepte care ar intersecta toate dreptele d , d_1 și d_2 nu există.

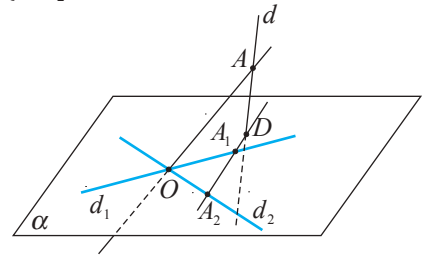


Fig. 8.17

4. Planul α este intersectat de dreptele necoplanare a și b în punctele A și respectiv B . Prin fiecare punct M al dreptei a se duce paralela cu dreapta b și se notează cu M' punctul de intersecție a acestei paralele cu planul α (fig. 8.18). Să se arate că atunci când punctul M descrie dreapta a , punctul M' descrie o dreaptă din planul α ce trece prin punctul A .

Rezolvare:

Fie b' dreapta care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta b (care există și este unică). Planul determinat de dreptele a și b' , concurente în A , intersectează planul α după dreapta c . Dreapta c este dreapta căutăată.

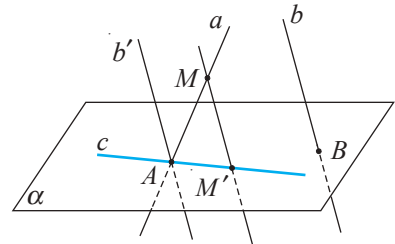


Fig. 8.18

Probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. În tetraedrul $ABCD$, punctul M este mijlocul muchiei BD , iar punctul N este mijlocul muchiei AD . Dreapta d este intersecția planului ABC cu planul determinat de dreapta MN și vârful C . În ce relație sunt dreptele d și MN ?
- B** 2.  **Investigați!** Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Punctul $E \in AD$ ($AE = 2ED$), punctul $L \in AB$ ($AL = 2LB$), punctul $F \in DC$ ($DF = 2FC$), punctul $M \in CB$ ($BM = 2MC$). Determinați relația dintre dreptele EL și FM .
- C** 3. Se dau punctele necoliniare A, B, C . Un plan paralel cu dreapta AB intersectează segmentele BC și AC în punctele M și respectiv N . Să se afle lungimea segmentului MN , dacă:
- a) $AB = 30$ cm și $MB : BC = 2 : 3$; b) $AB = 16$ cm și $BM : MC = 5 : 3$;
 c) $CM = 20$ cm și $AB : BC = 4 : 5$; d) $BM = a, MC = c, AB = b$.

Profilul real

- A₁** 1. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Pe segmentele AB, BC, CD și DA se iau punctele A_1, B_1, C_1 și respectiv D_1 , astfel încât $AA_1 : A_1B = 1 : 3$, $BB_1 : B_1C = 3 : 1$, $CC_1 : C_1D = 2 : 1$ și respectiv $DD_1 : D_1A = 1 : 2$. Să se demonstreze că punctele A_1, B_1, C_1, D_1 sunt coplanare.
- B₁** 2.  **Investigați!** Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Punctul $M \in AD$ și punctul $N \in BD$. În ce relație se află dreapta MN și planul ABC , dacă se știe că $AM : MD = BN : ND$?
- C₁** 3. Fie punctele A, B, C și D necoplanare. Pe segmentele AB, BC și CD se iau punctele A_1, B_1 și respectiv C_1 , astfel încât $AA_1 : A_1B = a$, $BB_1 : B_1C = b$ și $CC_1 : C_1D = c$. Planul $A_1B_1C_1$ intersectează segmentul AD în punctul D_1 . Să se afle raportul $DD_1 : D_1A$.
4.  **Lucrați în perechi!** Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABD , iar punctul N este centrul de greutate al triunghiului BDC . Să se demonstreze că dreapta MN este paralelă cu planul ABC .

§4 Plane paralele

Fie două plane în spațiu. Distingem următoarele cazuri posibile ale pozițiilor relative a două plane în spațiu:

- a) planele se intersectează după o dreaptă (fig. 8.19 a));
 b) planele nu au niciun punct comun (fig. 8.19 b));
 c) planele coincid (fig. 8.19 c)).

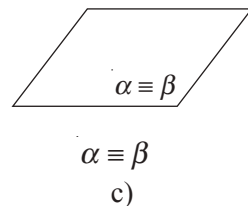
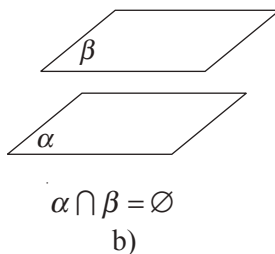
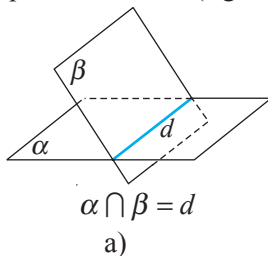


Fig. 8.19



Definiție. Două plane se numesc **paralele** dacă ele nu au puncte comune sau dacă coincid.

Teorema 9 (criteriul de paralelism al planelor). Dacă două drepte concurente situate într-un plan sunt paralele cu un alt plan, atunci planele sunt paralele.

Demonstrație

Fie dreptele concurente a și b , situate în planul α , paralele cu planul β (fig. 8.20).

Presupunem că planele α și β nu sunt paralele. Atunci intersecția lor este dreapta c . Conform teoremei 8, dreptele a și b sunt paralele cu dreapta c , dar aceasta contrazice axioma dreptelor paralele, deoarece obținem că în planul α printr-un punct trec două drepte diferite, a și b , paralele cu dreapta c , ceea ce este imposibil. Prin urmare, planele α și β sunt paralele. ►

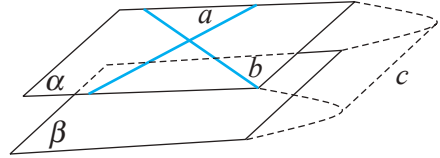
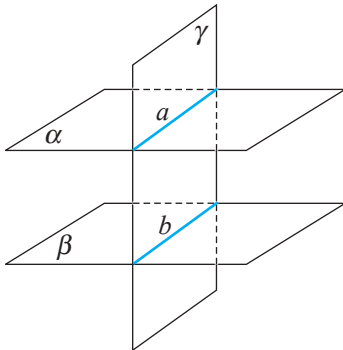


Fig. 8.20

Teorema 10. Dacă două plane paralele sunt intersectate de un al treilea plan, atunci dreptele de intersecție sunt paralele (fig. 8.21 a)).

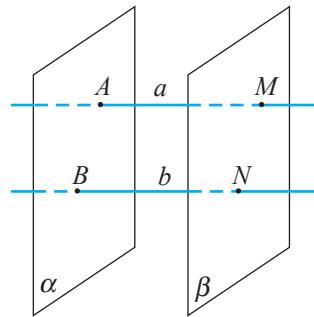
Teorema 11. Dacă două drepte paralele intersectează două plane paralele, atunci segmentele dreptelor cuprinse între aceste plane sunt congruente (fig. 8.21 b)).



$$(\alpha \parallel \beta, \gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b) \Rightarrow a \parallel b$$

a)

Fig. 8.21



$$(a \parallel b, \alpha \parallel \beta) \Rightarrow [AM] \equiv [BN],$$

$$A, B \in \alpha, M, N \in \beta$$

b)

Exercițiu. Demonstrați teoremele 10 și 11.

Probleme rezolvate

1. Segmentul AB nu intersectează planul α și este împărțit de punctele M și N în trei segmente, astfel încât $AM : MN = MN : NB = 1 : 2$. Prin punctele A, M, N și B sunt trasate drepte paralele ce intersectează planul α în punctele A_1, M_1, N_1 și respectiv B_1 (fig. 8.22). Să se afle lungimea segmentelor MM_1 și NN_1 , știind că $AA_1 = 2$ cm, $BB_1 = 16$ cm.

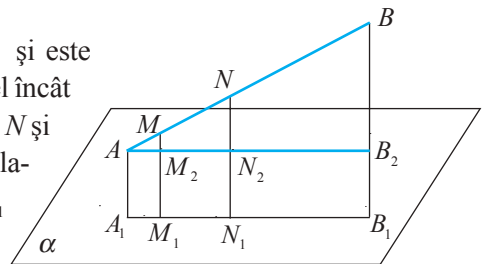


Fig. 8.22

Rezolvare:

Construim prin punctul A o dreaptă paralelă cu A_1B_1 , care intersectează dreptele MM_1 , NN_1 și BB_1 în punctele M_2 , N_2 și respectiv B_2 . Triunghiurile AM_2M și AB_2B sunt asemenea, deci $MM_2 : BB_2 = AM : AB$.

Din $AM : MN = MN : NB = 1 : 2$ rezultă că $AB = 7AM$. Atunci $MM_2 : BB_2 = 1 : 7$, $MM_2 = BB_2 : 7 = 14 : 7 = 2$.

Astfel, $MM_1 = MM_2 + M_2M_1 = 2 + 2 = 4$ (cm).

În mod analog, constatăm că $\triangle ANN_2 \sim \triangle ABB_2$.

Așadar, $NN_2 : BB_2 = AN : AB = 3AM : 7AM = 3 : 7$, de unde $NN_2 = \frac{3}{7}BB_2 = 6$ cm.

Prin urmare, $NN_1 = NN_2 + N_2N = 6 + 2 = 8$ (cm).

Răspuns: $MM_1 = 4$ cm, $NN_1 = 8$ cm.

2. Punctele A_1, A_2, A_3 sunt situate pe muchia piramidei $VABC$, astfel încât $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Prin aceste puncte sunt trasate plane paralele cu baza piramidei, care intersectează muchiile VB și VC în punctele B_1, B_2, B_3 și respectiv C_1, C_2, C_3 (fig. 8.23). Să se afle perimetrele triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$, dacă perimetrele triunghiurilor ABC și $A_3B_3C_3$ sunt $\mathcal{P}$ și respectiv $\mathcal{P}_3$.

Rezolvare:

Segmentul A_2B_2 este linie mijlocie a trapezului $A_1A_3B_3B_1$, adică $\mathcal{P}_2 = \frac{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_3}{2}$ (1), unde $\mathcal{P}_1$ și $\mathcal{P}_2$ sunt perimetrele triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și respectiv $A_2B_2C_2$.

În mod similar, $\mathcal{P}_1 = \frac{\mathcal{P} + \mathcal{P}_2}{2}$ (2). Din (1) și (2) obținem:

$$\mathcal{P}_2 = \frac{2\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}}{3}, \quad \mathcal{P}_1 = \frac{2\mathcal{P} + \mathcal{P}_3}{3}.$$

Răspuns: $\mathcal{P}_1 = \frac{2\mathcal{P} + \mathcal{P}_3}{3}$, $\mathcal{P}_2 = \frac{2\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}}{3}$.

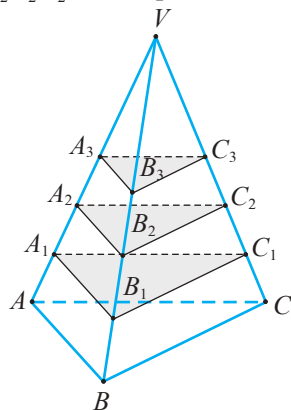


Fig. 8.23

3. Tetraedrul regulat $ABCD$ este secționat de un plan paralel cu planul feței BCD și care trece prin punctul $E \in AC$, astfel încât $AE : EC = 2 : 3$ (fig. 8.24). Să se afle aria secțiunii, dacă lungimea muchiei tetraedrului este a .

Rezolvare:

Este evident că laturile triunghiului FGE sunt paralele cu laturile feței BDC și că triunghiul FGE este echilateral.

Cum $\triangle AEF \sim \triangle ACB$, obținem:

$$\frac{BC}{FE} = \frac{AC}{AE} = \frac{AE + EC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE}, \quad \frac{BC}{FE} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2},$$

de unde $FE = \frac{2a}{5}$.

$$\text{Astfel, } \mathcal{A}_{FGE} = \frac{(EF)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{25 \cdot 4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}.$$

Răspuns: $\mathcal{A}_{FGE} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{25}$.

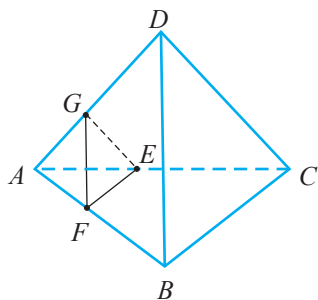


Fig. 8.24

4*. Să se construiască secțiunea prisme drepte $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cu planul determinat de diagonala BD_1 și de un punct $M \in (CC_1)$.

Rezolvare:

Evident că două laturi ale poligonului obținut în secțiune sunt segmentele BM și MD_1 (fig. 8.25).

Punctul $N \in CD \cap D_1 M$ este comun planului ABC și planului secțiunii căutate. Prin urmare, punctul $P \in BN \cap AD$ este comun planului ADD_1 și planului acestei secțiuni.

Punctul $L \in AA_1 \cap PD_1$ este cel de-al patrulea vârf al poligonului obținut în secțiune.

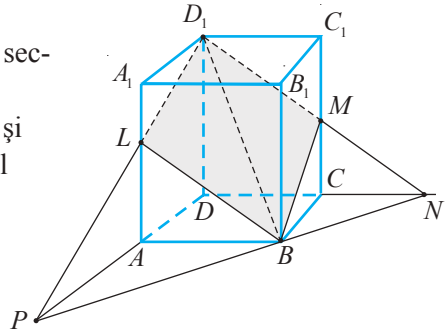


Fig. 8.25

Răspuns: Secțiunea este patrulaterul $BLD_1 M$.

Probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

A 1. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor AD, BD și respectiv CD . Să se arate că planele MNP și ABC sunt paralele.

B 2. **Lucrați în perechi!** Pe muchiile tetraedrului $ABCD$ sunt luate punctele $L \in AD, P \in AD$ ($AL = LP = PD$), $M \in BD$ ($DM = 2BM$), $N \in CD$ ($ND = 2NC$).

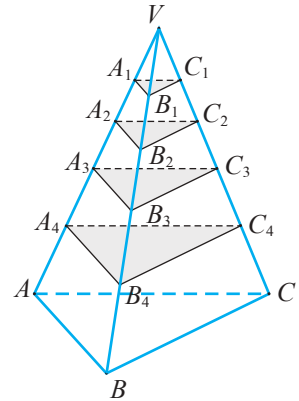
a) Să se arate că planul MNL este paralel cu planul ABC .

b) Să se construiască punctul I_1 de intersecție a dreptei PM cu planul ABC .

c) Să se construiască punctul I_2 de intersecție a dreptei PN cu planul ABC .

d) Să se construiască intersecția planelor ABC și PMN .

C 3. Punctele A_1, A_2, A_3, A_4 sunt situate pe muchia AV a piramidei triunghiulare $VABC$, astfel încât $[AA_4] \equiv [A_4A_3] \equiv [A_3A_2] \equiv [A_2A_1]$. Prin aceste puncte sunt construite plane paralele cu planul bazei piramidei, care intersectează muchiile VB și VC în punctele B_1, B_2, B_3, B_4 și respectiv C_1, C_2, C_3, C_4 . Să se determine perimetrele triunghiurilor obținute în secțiuni, dacă perimetrul triunghiului $A_1 B_1 C_1$ este de 5 cm, iar perimetrul triunghiului ABC este de 40 cm.



4. **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale paralelismului dreptelor și planelor în construcțiile edificiilor din localitate*.

5. **Activitate practică.** Determinarea relațiilor de paralelism în curtea școlii.

Profilul real

A₁ 1. Tetraedrul $ABCD$ este secționat de un plan ce trece prin punctul $M \in [AD]$ și care este paralel cu planul bazei ABC . Să se afle perimetrul poligonului obținut în secțiune, dacă $AM = 5$ cm, $AD = 15$ cm, $AB = 20$ cm, $BC = 19$ cm, $AC = 18$ cm.

- B₁** 2. Fie $ABCD$ un patrulater convex și E un punct ce nu aparține planului suport al patrulaterului $ABCD$. Punctele M, N, P sunt punctele de intersecție a medianelor triunghiurilor ABE, BCE și respectiv CDE . Să se demonstreze că planul MNP trece prin punctul Q de intersecție a medianelor triunghiului ADE .
- C₁** 3. Prisma triunghiulară dreaptă $ABCA_1B_1C_1$ este secționată de un plan ce trece prin punctul $M \in [AA_1]$ și care este paralel cu dreptele AB_1 și AC_1 . Să se determine perimetrul poligonului obținut în secțiune, dacă $AM = 1$ cm, $AA_1 = 3$ cm, $AB = AC = 4$ cm, $BC = 2$ cm.
4. Pe muchia VA a piramidei triunghiulare $VABC$ se iau punctele A_1, A_2, A_3 , astfel încât $A_1A_2 = 2AA_1$ și $A_2A_3 = 2A_1A_2$. Prin aceste puncte sunt trasate plane paralele cu planul bazei piramidei, care intersectează muchia VB în punctele B_1, B_2, B_3 , iar muchia VC – în punctele C_1, C_2, C_3 . Să se afle perimetrele $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ și $\mathcal{P}_3$ ale triunghiurilor $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ și respectiv $A_3B_3C_3$, dacă se știe că perimetrul triunghiului ABC este $\mathcal{P}$, iar $AA_1 : VA_3 = \lambda$.
5.  **Lucrați în perechi!** Fie $ABCD$ un patrulater convex și E un punct ce nu aparține planului suport al patrulaterului $ABCD$. Pe segmentele AE, BE, CE, DE se iau punctele M, N, P și respectiv R , astfel încât $2AM = 3ME, 2BN = 3NE, 2CP = 3PE, 3DR = 2RE$.
a) Să se demonstreze că planul MNP este paralel cu planul suport al patrulaterului $ABCD$.
b) Să se construiască punctul I de intersecție a dreptei NR cu planul suport al patrulaterului $ABCD$.
6.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicarea elementelor de paralelism în spațiu în construcțiile edificiilor din localitate*.
7. **Activitate practică.** Determinarea relațiilor de paralelism în curtea școlii.

Probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Segmentul AB nu intersectează planul α . Prin extremitățile segmentului AB și prin mijlocul lui, punctul M , sunt trasate drepte paralele, care intersectează planul α în punctele A_1, B_1 și respectiv M_1 . Să se afle lungimea segmentului MM_1 , dacă:
a) $AA_1 = 3,2$ m, $BB_1 = 2,3$ dm; b) $AA_1 = 19$ cm, $BB_1 = 2$ dm; c) $AA_1 = 33$ cm, $BB_1 = 75$ cm.
2. Segmentul AB nu intersectează planul α și este împărțit de punctele M și N în trei segmente congruente: AM, MN, NB . Prin extremitățile segmentului AB și prin punctele M și N sunt trasate drepte paralele ce intersectează planul α în punctele A_1, B_1, M_1 și respectiv N_1 . Să se afle lungimile segmentelor MM_1 și NN_1 , dacă se știe că $AA_1 = 16$ cm, $BB_1 = 4$ cm.
- B** 3. Fie planele paralele α, β și un punct M . Planul β și punctul M sunt situate în semispații diferite limitate de planul α . Prin punctul M sunt trasate două drepte care intersectează planul α în punctele A_1 și A_2 , iar planul β – în punctele B_1 și B_2 . Să se determine lungimea segmentului A_1A_2 , dacă $B_1B_2 = 20$ cm și $MA_1 : A_1B_1 = 3 : 2$.
- C** 4.  **Lucrați în perechi!** Punctele A, B, C, D sunt necoplanare. Punctul $L \in DC$, astfel încât $DL = 2LC$, iar punctul M este centrul de greutate al $\triangle ABD$. Să se arate că dreapta ML este paralelă cu planul ABC .

Profilul real

- A₁** 1. Printr-un punct O , ce nu aparține niciunui dintre planele paralele a și b , sunt construite dreptele a_1, a_2, a_3 și a_4 , care intersectează planul a în punctele A_1, A_2, A_3 și respectiv A_4 , iar planul b – în punctele B_1, B_2, B_3 și respectiv B_4 .

Să se demonstreze că $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_3}{OB_3} = \frac{OA_4}{OB_4}$.

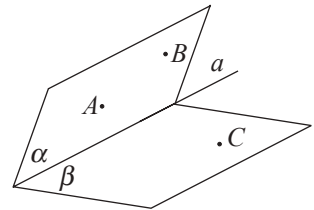
2. Să se demonstreze că dacă orice dreaptă ce intersectează unul dintre cele două plane date intersectează și al doilea plan, atunci planele sunt paralele.
3. O dreaptă intersectează planul α în punctul A . Prin punctele B și C (B se află între A și C) ale dreptei, situate în același semispațiu limitat de planul α , sunt trasate două drepte paralele care intersectează planul α în punctele B_1 și respectiv C_1 . Să se afle lungimea segmentului BB_1 , dacă:
- a) $CC_1 = a$ și $AC : BC = \lambda$; b) $CC_1 = a$ și $AB : AC = \mu$;
c) $AB = l$ și $AC : CC_1 = k$; d) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

4.  **Lucrați în perechi!** Punctele A, B, C, D sunt necoplanare și $AC = 12$ cm, $BD = 20$ cm. Să se determine perimetrul patrulaterului ale cărui vârfuri sunt mijloacele segmentelor AB, BC, CD, DA .

5. Punctul E nu aparține planului trapezului $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Punctele M și L sunt mijloacele laturilor AB și CD ale trapezului, iar punctele N și P – mijloacele segmentelor BE și CE . Să se arate că dreptele MN și PL sunt concurente.
6. Fie punctele A, B, C, D necoplanare. Pe segmentele AC și BC se iau punctele M și respectiv N , astfel încât $AM : MC = BN : NC = m : n$. Să se afle lungimea segmentului determinat de mijloacele segmentelor AD și BD , dacă $MN = a$.
7. Tetraedrul regulat $ABCD$ este secționat de un plan ce trece prin vârful A și prin mijloacele muchiilor BD și CD . Să se afle aria secțiunii obținute, dacă lungimea muchiei tetraedrului este $2a$.

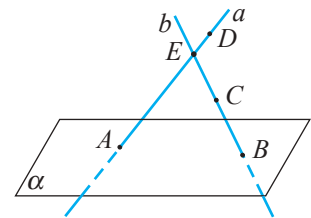
- B₁** 8. Fie trei drepte necoplanare care se intersectează două câte două. Să se demonstreze că dreptele au un punct comun.

9. Se dau planele α și β , a căror intersecție este dreapta a . Punctele A și B aparțin planului α , iar punctul C aparține planului β . Să se construiască liniile de intersecție a planului ABC cu planele α și β .



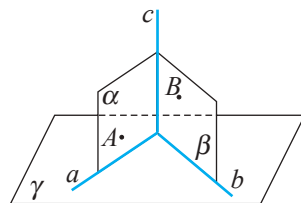
10. Punctul E nu aparține planului paralelogramului $ABCD$. Să se demonstreze că linia de intersecție a planelor ABE și CDE este o dreaptă paralelă cu dreapta DC .

11. Prin punctul E ce nu aparține planului α sunt duse dreptele a și b , care intersectează planul α în punctele A și respectiv B . Punctul D aparține dreptei a , iar punctul C – dreptei b . Să se construiască punctul de intersecție a dreptei DC cu planul α .



12. Se dau punctele necoplanare A, B, C și D . Să se demonstreze că dreapta a care trece prin mijloacele segmentelor AB și DC , dreapta b ce trece prin mijloacele segmentelor AD și BC și dreapta c care trece prin mijloacele segmentelor AC și DB au un punct comun.

13. Planele α și β , a căror intersecție este dreapta c , intersectează planul γ după dreptele a și b . Punctul A aparține planului α , iar punctul B aparține planului β , astfel încât $AB \parallel \gamma$. Să se construiască punctul de intersecție a dreptei AB cu planul γ .



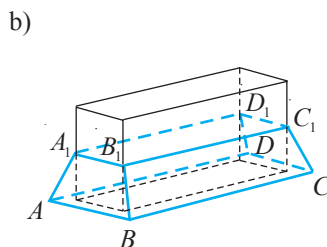
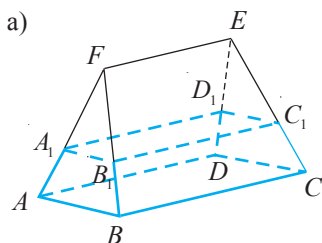
14. Fie patrulaterul convex $ABCD$ situat în planul α .

Presupunem că patrulaterul $ABCD$ are laturile opuse neparalele.

Punctul E nu aparține planului α . Să se traseze intersecțiile planelor:

- a) EAB și EDC ; b) EAD și EBC ; c) EAC și EBD .

- C₁** 15. La reconstrucția acoperișului unei case s-a luat decizia de a ridica o mansardă. Căpriorii AF, BF, CE și DE urmează să fie tăiați în punctele A_1, B_1, C_1 și respectiv D_1 , astfel încât planul dreptunghiului $A_1B_1C_1D_1$ să fie paralel cu planul podului (fig. a)). Capetele căpriorilor se vor sprijini pe colțurile pereților mansardei (fig. b)). La ce distanță de la colțurile podului casei trebuie tăiați căpriorii, astfel încât lățimea mansardei în exterior să fie de 9 m, dacă se știe că lățimea podului casei este de 12 m, iar lungimea căpriorilor – de 8 m?



16. Se dau punctele necoplanare A, B, C și D . Punctul M aparține segmentului DC . Să se construiască liniile de intersecție a planelor ADC, CBD, ABC și ABD cu planul care trece prin punctele M și A și este paralel cu dreapta BD .

17. Fie punctele necoplanare A, B, C și D și punctul E ce aparține segmentului AC , astfel încât $AE : EC = 3 : 2$. Să se construiască liniile de intersecție a planelor ADC, ADB, ABC cu planul ce trece prin punctul E și este paralel cu planul BCD .

18. Fie punctele necoplanare A, B, C și D . Punctul M este mijlocul segmentului AD , iar punctul G este intersecția medianelor triunghiului ABC .

- a) Să se construiască punctul F de intersecție a dreptei MG cu planul BCD .
b) Să se demonstreze că punctele B, D, C, F sunt vârfurile unui paralelogram.

19. Se dau punctele necoplanare A, B, C și D . Punctele E, F și H sunt situate pe dreptele AD, DC și respectiv BC , astfel încât $EF \parallel AC$ și $FH \parallel DB$. Să se construiască punctele de intersecție a planului EFH cu dreptele AB și DB .

20.  **Investigați!** Punctele A, B, C și D sunt necoplanare. Câte plane pot fi duse la aceeași distanță de aceste puncte?

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilurile umanist, arte, sport

1. Prin două puncte distincte A și B , ce aparțin unuia dintre cele două plane paralele, sunt construite două drepte paralele care intersectează celălalt plan în punctele A_1 și respectiv B_1 . Determinați lungimea segmentului A_1B_1 , dacă $AB = 8$ cm. ④
2. Construiți cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ și indicați: ⑦
 - a) drepte paralele cu planul BCD ;
 - b) plane paralele cu dreapta A_1B_1 .
3. Punctul M este mijlocul muchiei AD a tetraedrului regulat $ABCD$ cu muchiile de lungime a . Aflați perimetrul triunghiului MNC , unde N este punctul de intersecție a dreptei BD cu planul ce trece prin dreapta MC , paralel cu dreapta AB . ⑦
4. Paralelogramele $ABCD$ și ABB_1A_1 sunt situate în plane diferite. Determinați lungimea segmentului B_1C , dacă $A_1D = 8$ cm. ⑥

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	24–23	22–21	20–18	17–15	14–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilul real

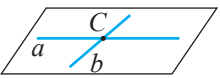
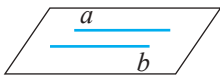
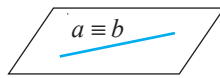
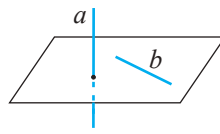
1. Dreapta a este paralelă cu planul α , iar dreapta b intersectează acest plan. Stabiliți poziția relativă a dreptelor a și b . ⑤
2. Fie punctele necoplanare A, B, C, D . Determinați poziția față de planul ABC a dreptei: ⑦
 - a) EF , unde E este mijlocul segmentului AD , F – mijlocul segmentului BD ;
 - b) GH , unde G aparține segmentului BD , H aparține segmentului CD și $\frac{BG}{GD} = \frac{CH}{HD} = \frac{1}{3}$.
3. Fie piramida $SABCD$ și punctul $E \in (SD)$. Secționați această piramidă cu planul ce trece prin punctul E și care este paralel cu planul bazei $ABCD$. ③
4. Construiți secțiunea tetraedrului regulat $ABCD$, formată de planul care trece prin punctul $E \in (AD)$, astfel încât $AE : ED = 1 : 2$, și care este paralel cu planul bazei ABC . Aflați aria secțiunii obținute, dacă se știe că aria unei fețe a tetraedrului este $\mathcal{A}$. ⑧

Baremul de notare

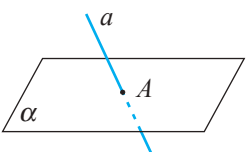
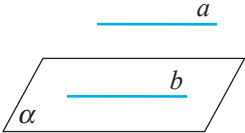
Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	23–22	21–20	19–17	16–14	13–11	10–8	7–6	5–4	3–2	1–0

Pozițiile relative ale dreptelor și planelor

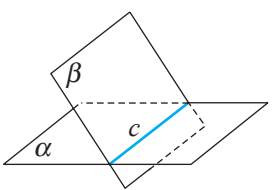
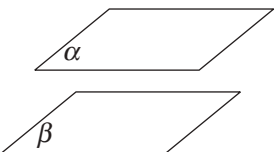
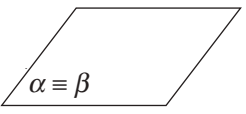
1. Pozițiile relative a două drepte

a și b coplanare			a și b necoplanare
			
$a \cap b = \{C\}$	$a \cap b = \emptyset$	$a \equiv b$	$a \cap b = \emptyset$

2. Pozițiile relative ale unei drepte și unui plan

a secantă cu α	a paralelă cu α	
		
$a \cap \alpha = \{A\}$	$b \subset \alpha, a \parallel b, a \cap \alpha = \emptyset$	$a \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$

3. Pozițiile relative a două plane

α și β secante	α și β paralele	
		
$\alpha \cap \beta = c$	$\alpha \cap \beta = \emptyset$	$\alpha \equiv \beta$

Perpendicularitatea în spațiu

Obiective

- ⇒ recunoașterea în diverse contexte, descrierea, construirea dreptelor perpendiculare, a dreptei perpendiculare pe plan;
- ⇒ calcularea lungimilor segmentelor, măsurilor unghiurilor diedre, aplicând teorema celor trei perpendiculare;
- ⇒ utilizarea în situații reale și/sau modelate a criteriilor de perpendicularitate a două drepte, a dreptei și planului, a două plane;
- ⇒ recunoașterea, descrierea și construirea proiecțiilor ortogonale ale punctelor, segmentelor, dreptelor pe plan;
- ⇒ calcularea lungimilor proiecțiilor ortogonale ale segmentelor în contexte diverse;
- ⇒ aplicarea perpendicularității în spațiu pentru a identifica și explica procese, fenomene din diverse domenii.

§1 Drepte și plane perpendiculare

Lemă. Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare (fig. 9.1 a)).

Demonstrație

Fie unghiurile proprii AMB și $A_1M_1B_1$ cu $[MA \parallel [M_1A_1$, $[MB \parallel [M_1B_1$, $MA = M_1A_1$ și $MB = M_1B_1$. Considerăm cazul când punctul A_1 aparține semiplanului determinat de dreapta MM_1 și punctul A , iar punctul B_1 aparține semiplanului determinat de dreapta MM_1 și punctul B (fig. 9.1 c)). În aceste condiții, MAA_1M_1 și MBB_1M_1 sunt paralelograme, deci $MM_1 = AA_1 = BB_1$. Prin urmare, ABB_1A_1 de asemenea este paralelogram și $AB = A_1B_1$. Concluzia lemei rezultă din faptul că $\triangle AMB \equiv \triangle A_1M_1B_1$. ►

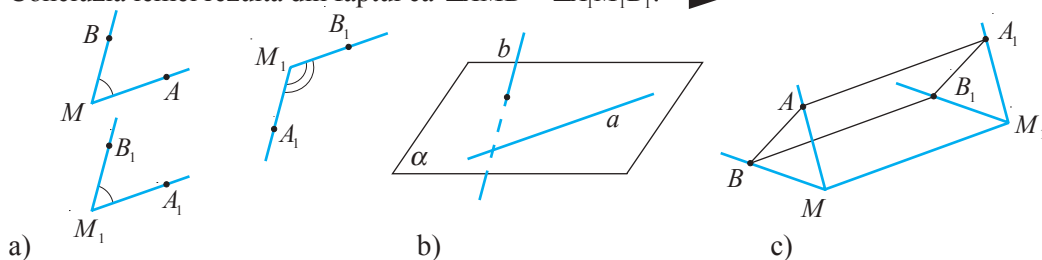


Fig. 9.1

Rezultatul obținut ne permite să vorbim despre unghiul format de două drepte necoplanare. Anume prin **unghiul format de două drepte** necoplanare a și b se înțelege un astfel de unghi BMA , încât M este un punct oarecare al spațiului, $MB \parallel b$, $MA \parallel a$ și $m(\angle BMA) \in [0^\circ, 180^\circ]$ (fig. 9.1 a), b)).

Definiție. Două drepte în spațiu se numesc **perpendiculare** dacă măsura unghiului format de ele este de 90° (fig. 9.2).

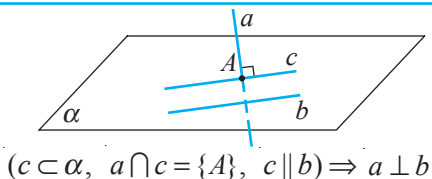


Fig. 9.2

Dreptele perpendiculare a, b se notează: $a \perp b$.

Ușor se deduce că în cubul din figura 9.3,

$AA_1 \perp BC$, $AD_1 \perp CB_1$.

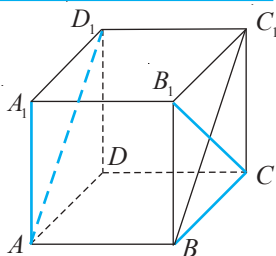


Fig. 9.3

Definiții. • Dreapta perpendiculară pe orice dreaptă dintr-un plan se numește **perpendiculară pe acest plan**. În acest caz, se mai spune că **planul este perpendicular pe dreapta**.

• Dreapta care nu este perpendiculară pe plan și nu este paralelă cu el se numește **oblică** pe acest plan (fig. 9.4).

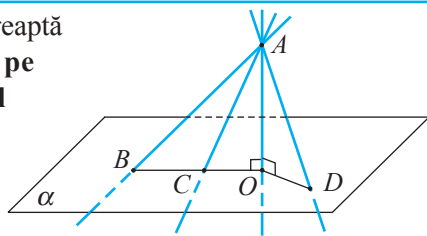


Fig. 9.4

În figura 9.4, dreapta AO este perpendiculară pe planul α , iar dreptele AB, AC, AD sunt oblice pe acest plan.

Teorema 1. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente situate într-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe acest plan.

Demonstrație

Fie dreptele a și b din planul α concurente în punctul O și o dreaptă c perpendiculară pe dreptele a și b (fig. 9.5), iar $d \subset \alpha$ o dreaptă arbitrară.

În virtutea definiției unghiului format de două drepte în spațiu, se poate admite că dreptele c și d conțin de asemenea punctul O . Luăm pe dreptele a și b două puncte arbitrare, A și res-

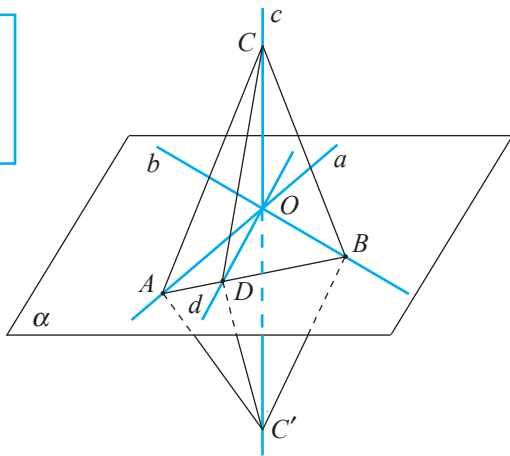


Fig. 9.5

pectiv B , diferite de O . Dreapta d intersectează $[AB]$ în punctul D . Pe dreapta c luăm punctele C și C' , astfel încât $[OC'] \equiv [CO]$ (fig. 9.5).

Cum $\triangle COA \equiv \triangle C'OA$ și $\triangle COB \equiv \triangle C'OB$ (ca triunghiuri dreptunghice cu catetele respectiv congruente), deducem că $[AC] \equiv [AC']$ și $[BC] \equiv [BC']$. Rezultă că $\triangle ACB \equiv \triangle AC'B$ și $\angle CAB \equiv \angle C'AB$. Aplicând criteriul LUL, constatăm că $\triangle CAD \equiv \triangle C'AD$, deci triunghiul CDC' este isoscel. Segmentul DO este mediana corespunzătoare bazei triunghiului CDC' . Prin urmare, $[DO]$ este și înălțime, adică $c \perp d$. ►

Existența și unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă dată, ce trece printr-un punct al acestei drepte, rezultă din

Teorema 2. Prin orice punct al unei drepte trece un unic plan perpendicular pe această dreaptă.

Exercițiu. Demonstrați teorema 2.

Problemă rezolvată

☞ Să se demonstreze că printr-un punct arbitrar A , ce nu aparține dreptei date a , trece un unic plan perpendicular pe dreapta a .

Rezolvare:

În planul $\alpha = (A, a)$ construim $AA' \perp a$ (fig. 9.6). Conform axiomei S_1 (modulul 8), există un punct B ce nu se află în planul α , care cu dreapta a determină planul β . În planul β din punctul A' construim perpendiculara $A'C$ pe dreapta a . Planul determinat de punctele A, A', C este planul care verifică condiția problemei.

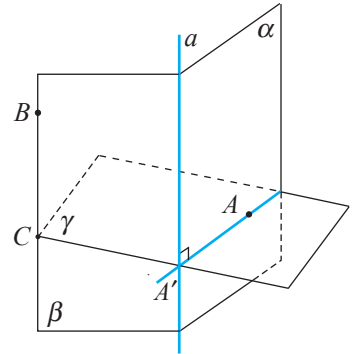


Fig. 9.6

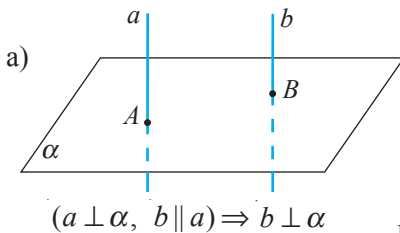
Unicitatea planului α rezultă din teorema 2.

Teorema 3. Pentru orice plan și orice punct există o unică dreaptă care trece prin punctul dat și este perpendiculară pe planul dat.

Prezentăm unele **proprietăți ale perpendicularității dreptelor și planelor**.

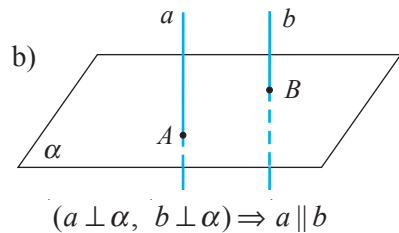
Teorema 4. Dacă un plan este perpendicular pe una dintre două drepte paralele, atunci el este perpendicular și pe cealaltă dreaptă (fig. 9.7 a)).

Teorema 5. Dacă două drepte sunt perpendiculare pe același plan, atunci ele sunt paralele (fig. 9.7 b)).



$$(a \perp \alpha, b \parallel a) \Rightarrow b \perp \alpha$$

Fig. 9.7



$$(a \perp \alpha, b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b$$

Exercițiu. Demonstrați teoremele 4 și 5.

Probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Dreptunghiurile $CDAB$ și $CDEF$ au o latură comună și planele suport distincte. Să se arate că $CD \perp BF$.
2. Triunghiurile CAD și BAD cu $m(\angle A) = 90^\circ$ au o catetă comună și planele suport distincte. Să se arate că AD este perpendiculară pe dreapta MN , unde M este mijlocul segmentului CD , iar N este mijlocul segmentului BD .
- B** 3. Dreapta suport a segmentului AB cu lungimea de 5 cm este perpendiculară pe planul α . Segmentul AB intersectează planul α în punctul C . În planul α se ia un punct D , astfel încât $AD = 3$ cm, $BD = 4$ cm. Să se determine lungimea segmentului CD .
4. Din vârful A al pătratului $ABCD$ este construită perpendiculara AM pe planul pătratului. Să se determine MB , MD și MC , știind că $AB = 4$ cm, $MA = 3$ cm.
5.  **Lucrați în perechi!** Din vârful A al triunghiului ACB dreptunghic în C este construită perpendiculara AE pe planul triunghiului. Să se afle ipotenuza AB , dacă $AE = CB = a$, $EC = b$.
- C** 6. Din vârful A al dreptunghiului $ABCD$, pe planul dreptunghiului, este construită perpendiculara AE , astfel încât $AE = 4$ cm. Să se determine DE , CE , BE și înălțimea triunghiului EBD dusă din vârful E , dacă $AB = 6$ cm și $AD = 4$ cm.

Profilul real

- A₁** 1. Distanțele de la punctele A și B , situate în diferite semispații mărginite de planul α , până la acest plan sunt egale cu a și respectiv b . Să se afle lungimea segmentului AB , dacă $A_1B_1 = c$, unde A_1 și B_1 sunt punctele de intersecție a perpendicularelor ce trec prin punctele A și respectiv B pe planul α .
2. Punctul D , $D \notin (ABC)$, este egal depărtat de vârfurile triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$). Să se afle distanța DE , unde $DE \perp (ABC)$, $E \in (ABC)$, dacă $BC = a$, $AD = b$, $m(\angle CAB) = \alpha$.
- B₁** 3. Punctul M este egal depărtat de vârfurile poligonului $ABCDE$. Să se arate că segmentele OA , OB , OC , OD și OE sunt congruente, unde $MO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$.
4. Punctul E , ce nu aparține planului dreptunghiului $ABCD$, este egal depărtat de vârfurile dreptunghiului. Să se arate că dreapta ce trece prin punctul O de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ și punctul E este perpendiculară pe planul suport al dreptunghiului $ABCD$.
- C₁** 5.  **Lucrați în perechi!** Din vârful A al paralelogramului $ABCD$ pe planul lui este construită perpendiculara AE de lungime c . Să se determine BE , CE , DE , dacă $AB = a$, $AD = b$ și $m(\angle BAD) = \alpha$.
6. Dreptele d_1 și d_2 sunt concurente în punctul A . Prin punctul A se construiesc planele α și β , astfel încât $d_1 \perp \alpha$, $d_2 \perp \beta$. Să se arate că linia de intersecție a planelor α și β este perpendiculară pe planul definit de dreptele d_1 și d_2 .

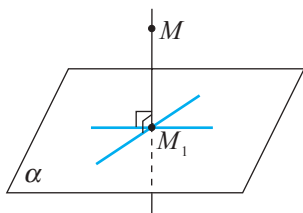
§ 2 Proiecții ortogonale.

Unghi format de o dreaptă și un plan

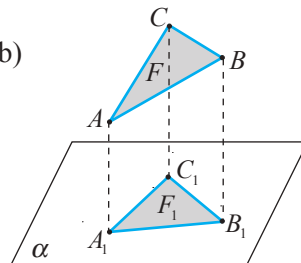
Definiție. Proiecție ortogonală a unui punct M pe un plan α se numește piciorul perpendicularei (punctul M_1) construite din M pe acest plan (fig. 9.8 a)).

Se notează: $pr_\alpha M = M_1$.

a)



b)



$$(MM_1 \perp \alpha, M_1 \in \alpha) \Rightarrow M_1 = pr_\alpha M$$

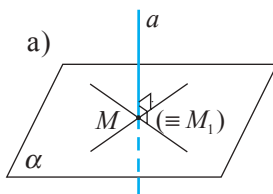
$$F_1 = pr_\alpha F$$

Fig. 9.8

Proiecția ortogonală a unei figuri geometrice F pe un plan este mulțimea F_1 formată din proiecțiile ortogonale ale tuturor punctelor figuri geometrice date pe acest plan (fig. 9.8 b)).

Fie o dreaptă a și un punct M . Știm că există un unic plan α care trece prin punctul M și este perpendicular pe dreapta a . Fie M_1 punctul de intersecție a dreptei a cu planul α (fig. 9.9 a), $M \in a$; fig. 9.9 b), $M \notin a$.

a)



b)

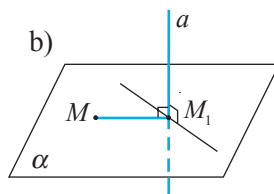


Fig. 9.9

Definiție. Punctul M_1 se numește **proiecție ortogonală** a punctului M pe dreapta a , iar lungimea segmentului MM_1 se numește **distanță** de la punctul M la dreapta a (fig. 9.9).

Observație. În cele ce urmează, prin proiecție se va înțelege proiecția ortogonală.

Teorema 6. Proiecția unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct.

Demonstrație

Dacă dreapta a este perpendiculară pe planul α , atunci proiecția ei este punctul de intersecție a acestei drepte cu planul α .

Considerăm că dreapta a nu este perpendiculară pe planul α (fig. 9.10).

Fie A și B puncte distincte pe dreapta a . Notăm cu A_1 și B_1 proiecțiile lor pe planul α .

În baza teoremei 5, dreptele AA_1 și BB_1 sunt paralele, deci ele determină un plan β .

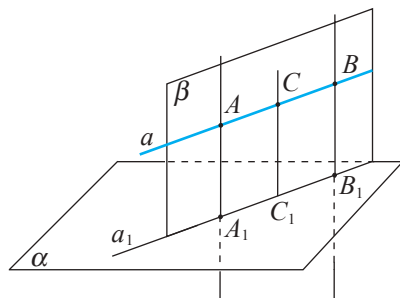


Fig. 9.10

Planului β îi aparține și dreapta a , și dreapta $a_1 = A_1B_1$. Dacă luăm un punct arbitrar $C \in a$, constatăm că punctul $C_1 = pr_\alpha C$ aparține planului β ($CC_1 \parallel AA_1$ și $C \in a \subset \beta$), deci C_1 aparține dreptei de intersecție a planelor α și β , care este dreapta A_1B_1 .

Astfel, am demonstrat că proiecția oricărui punct al dreptei a este un punct al dreptei a_1 , adică $pr_\alpha a = a_1$. ►

Teorema 7 (teorema celor trei perpendiculare). Dacă proiecția a_1 pe planul α a unei drepte oblice a este perpendiculară pe o dreaptă b din planul α , atunci și dreapta a este perpendiculară pe dreapta b .

Demonstrație

Fie dreapta AA_1 perpendiculară pe planul α , $A \in a$, $A_1 \in \alpha$, deci $AA_1 \perp b \subset \alpha$ (fig. 9.11). Din enunțul teoremei rezultă că dreapta b este perpendiculară pe a_1 , adică dreapta b este perpendiculară și pe dreapta AA_1 , și pe dreapta BA_1 . Deducem că dreapta b este perpendiculară pe planul determinat de punctele A, B, A_1 . Prin urmare, dreapta b este perpendiculară și pe dreapta $AB = a$ care aparține acestui plan. ►

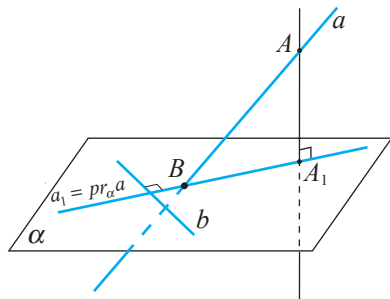


Fig. 9.11

Teorema 8 (reciproca teoremei celor trei perpendiculare). Dacă dreapta a este perpendiculară pe o dreaptă b din planul α și nu este perpendiculară pe plan, atunci proiecția a_1 a dreptei a pe planul α este perpendiculară pe dreapta b .

Demonstrație

Dreapta AA_1 (fig. 9.11) este perpendiculară pe planul α , deci $AA_1 \perp b \subset \alpha$ și din enunțul teoremei rezultă că $AB \perp b$, adică dreapta b este perpendiculară pe planul ABA_1 . Prin urmare, b este perpendiculară pe dreapta $a_1 = BA_1 = pr_\alpha a$. ►

Fie un plan α și un punct A ce nu aparține planului (fig. 9.12).

Definiții. • **Segment perpendicular** pe planul α , construit din punctul A , se numește segmentul ce unește punctul A cu punctul de pe plan și care aparține dreptei perpendiculare pe plan. Extremitatea ce aparține planului se numește **picioarul perpendicularei**.

• **Segment oblic** pe planul α , construit din punctul A , se numește segmentul ce unește punctul A cu orice punct al planului α și nu este perpendicular pe plan. Extremitatea ce aparține planului se numește **picioarul oblicei** (fig. 9.12).

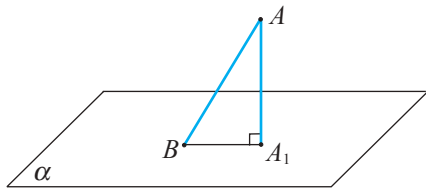


Fig. 9.12

Teorema 9. Fie un plan α , un punct A ce nu aparține planului α , un punct B ce aparține planului α și $A_1 = pr_\alpha A$. Atunci $AA_1 \leq AB$ (fig. 9.12).

Demonstrație

Într-adevăr, segmentul AA_1 este perpendicular pe planul α , deci și pe segmentul BA_1 . Rezultă că triunghiul AA_1B este dreptunghic în A_1 . Prin urmare, $AA_1 \leq AB$, egalitatea având loc numai dacă B coincide cu A_1 ($AB \perp \alpha$). ►

Definiție. Distanță de la un punct la un plan se numește lungimea segmentului având o extremitate punctul dat și cealaltă – proiecția punctului pe acest plan.

În figura 9.12, lungimea segmentului AA_1 este distanța de la punctul A la planul α .

Teorema 10. Dacă între laturile triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AC] \equiv [A_1C_1]$ și $BC > B_1C_1$, atunci $m(\angle BAC) > m(\angle B_1A_1C_1)$ (fig. 9.13).

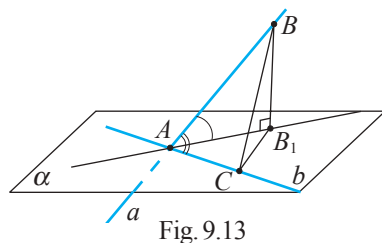


Fig. 9.13

În cazul în care dreapta nu este perpendiculară pe plan este justificată următoarea

Definiție. Unghi format de o dreaptă și un plan se numește unghiul ascuțit format de această dreaptă și proiecția ei ortogonală pe acest plan.

În figura 9.14, unghiul φ este unghiul format de dreapta a și planul α .

Observație. Prin **unghiul format de un segment și un plan** vom înțelege unghiul format de dreapta suport a segmentului dat și acest plan.

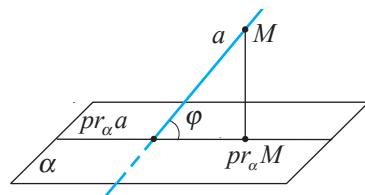


Fig. 9.14

Teorema 11. Lungimea proiecției unui segment pe un plan este egală cu produsul dintre lungimea acestui segment și cosinusul unghiului format de segment și plan.

Demonstrație

Fie un segment AB , un plan α ($[AB] \not\parallel \alpha$), proiecțiile A_1 și B_1 ale punctelor A și respectiv B pe planul α și D – punctul de intersecție a dreptei AB cu planul α (fig. 9.15).

Fie C punctul de intersecție a dreptei BB_1 cu dreapta ce trece prin A paralelă cu dreapta A_1B_1 . Constatăm că triunghiul ABC este dreptunghic în C și au loc relațiile $m(\angle BAC) = m(\angle ADA_1) = \varphi$. Astfel, în triunghiul ABC avem $AC = AB \cos \varphi$ și, cum $AC = A_1B_1$, rezultă că $A_1B_1 = AB \cos \varphi$.

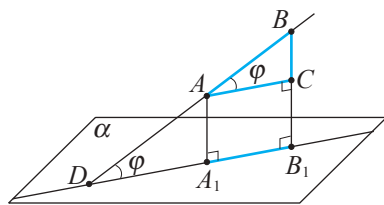


Fig. 9.15

Fie punctele A, B situate în semispații diferite limitate de planul α (fig. 9.16).

Atunci $A_1B_1 = A_1D + DB_1$ și din triunghiurile AA_1D și BB_1D avem

$$A_1D = AD \cos \varphi, \quad DB_1 = DB \cos \varphi.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} A_1B_1 &= AD \cos \varphi + DB \cos \varphi = \\ &= (AD + DB) \cos \varphi = AB \cos \varphi. \end{aligned}$$

Celelalte cazuri ($[AB] \parallel \alpha, \dots$) sunt evidente. ►

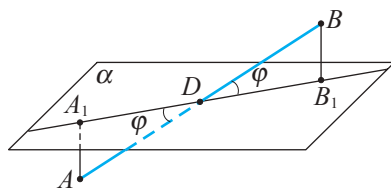


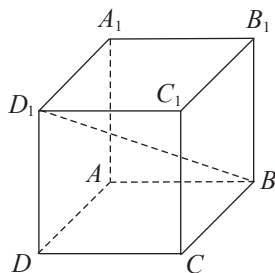
Fig. 9.16

Probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Segmentul A_1B_1 este proiecția ortogonală a segmentului AB pe planul α . Să se afle:
- lungimea segmentului A_1B_1 , dacă $AA_1 = 9$ cm, $BB_1 = 13$ cm, $AB = 5$ cm;
 - cosinusul unghiului format de segmentul AB și planul α .
2.  **Lucrați în perechi!** Dintr-un punct care nu aparține unui plan sunt construite două oblice la acest plan, cu lungimile de 30 cm și 25 cm. Diferența lungimilor proiecțiilor oblicelor este egală cu 11 cm. Să se determine distanța de la punct la plan.
- B** 3. Într-o încăpere, o grindă este instalată pe doi piloni, cu lungimile de 3 m și 5 m. Să se afle distanța de la podea la punctul ce împarte lungimea grindei în raportul de 2 : 3, considerând de la pilonul mai scurt.

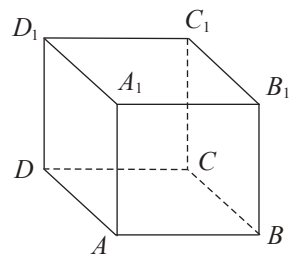
4. (BAC, 2011) În desen, $ABCD A_1B_1C_1D_1$ este un cub. Desenați proiecția ortogonală a segmentului BD_1 pe planul (ABB_1) .



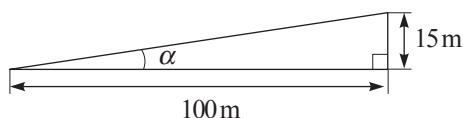
- C** 5. Distanța de la punctul A la planul α este de 3 cm. Oblicele AC și AB ($C, B \in \alpha$) la planul α au lungimile de 6 cm. Punctul M este mijlocul segmentului CB , iar $A_1 = pr_{\alpha} A$. Să se determine lungimea segmentului A_1M , dacă:
- $m(\angle CAB) = 90^\circ$;
 - $m(\angle CAB) = 60^\circ$.
6. Distanțele de la punctele A și B , situate în același semispațiu mărginit de planul α , până la acest plan sunt egale cu a și respectiv b . Să se afle lungimea segmentului AB , dacă $A_1B_1 = c$, unde A_1 și B_1 sunt punctele de intersecție a perpendicularelor din A și respectiv B pe planul α .

Profilul real

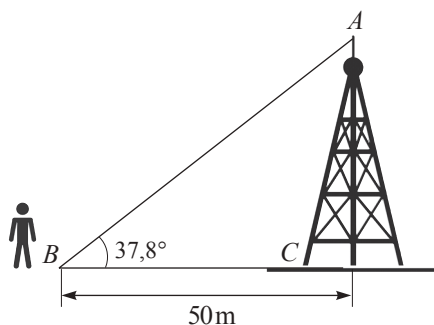
- A₁** 1. (BAC, 2013) Completați caseta astfel încât propoziția obținută să fie adevărată. Cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ are muchia de 2 cm. Atunci distanța de la vârful B_1 la planul $(AA_1 C)$ este egală cu cm.



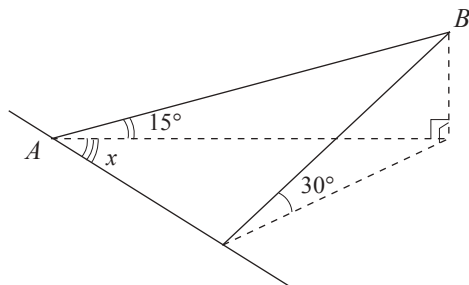
- B₁** 2. a) Panta drumului este de 15 % dacă la parcurgerea unei distanțe de 100 m pe orizontală urcăm la o înălțime de 15 m. Să se afle unghiul α .
b) Care este unghiul ce corespunde unei pante de 100 %?



3. Să se afle înălțimea releului de televiziune, dacă observatorul ce se află în planul orizontal la o distanță de 50 m de baza releului are înălțimea de 1,65 m, iar unghiul ABC format de semidreapta orizontală BC și semidreapta BA orientată de la ochii observatorului spre vârful releului este de $37,8^\circ$.



4. Unghiul pantei unui munte este de 30° . Sub ce unghi față de poalele muntelui (vezi figura alăturată) trebuie construit un drum rectiliniu AB , pentru ca unghiul lui de înclinație față de planul orizontului să fie egal cu 15° ? (Unghi al pantei este unghiul liniar al unghiului diedru format de planul muntelui și planul orizontal.)



5. Punctul D este situat la distanța de 9 cm de la vârfurile triunghiului ABC dreptunghic în C , $AC = 8$ cm, $BC = 6$ cm. Să se determine distanța DE , unde $DE \perp (ABC)$, $E \in (ABC)$.

- C₁** 6. Semidreapta $[OC$ formează unghiuri congruente cu semidreptele $[OA$ și $[OB$. Să se afle lungimea proiecției segmentului OC pe planul AOB , dacă $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha$, $m(\angle AOB) = 2\beta$, iar $OC = c$.

§3 Unghi format de două plane (unghi diedru)

Amintim că orice dreaptă a dintr-un plan α împarte mulțimea punctelor planului α ce nu aparțin dreptei a în două submulțimi α_1 și α_2 , care se numesc **semiplane deschise**. Dreapta a determină atât semiplanul α_1 , cât și semiplanul α_2 . Reuniunea semiplanului deschis cu dreapta ce-l determină se numește **semiplan închis**. Planul α se numește **plan suport** și pentru semiplanul α_1 , și pentru semiplanul α_2 .

Definiție. Reuniunea a două semiplane închise, limitate de aceeași dreaptă, se numește **unghi diedru** (fig. 9.17).

Unghiul diedru al semiplanelor α_1, β_1 se notează $\angle(\alpha_1\beta_1)$.

Dreapta a se numește **muchia unghiului diedru** $\angle(\alpha_1\beta_1)$, iar semiplanele α_1 și β_1 se numesc **fețele unghiului diedru**.

Unghiul diedru format de două semiplane ce coincid se numește **unghi nul**.

Unghiul diedru format de semiplanele α_1 și β_1 a căror reuniune este un plan se numește **unghi diedru plat**.

Unghi diedru propriu se numește unghiul diedru diferit de cel nul și de cel plat.

Interiorul unghiului diedru propriu se numește intersecția semispațiului determinat de planul suport al lui α_1 , ce conține semiplanul β_1 , cu semispațiul determinat de planul suport al lui β_1 , ce conține semiplanul α_1 .

Fie $\angle(\alpha_1\beta_1)$ un unghi diedru propriu și A un punct oarecare pe muchia m a acestuia. Din punctul A , în fiecare dintre semiplanele α_1 și β_1 , construim perpendicularele a și b (fig. 9.18 a)). Astfel, am obținut un unghi plan cu vârful în punctul A , laturile lui fiind semidreptele $[AB]$ și $[AC]$ ($C \in b$, $B \in a$).

Acest unghi plan poate fi obținut la intersecția unghiului diedru $\angle(\alpha_1\beta_1)$ cu un plan γ perpendicular pe muchia m a acestui unghi, ce trece prin punctul A (fig. 9.18 b)).

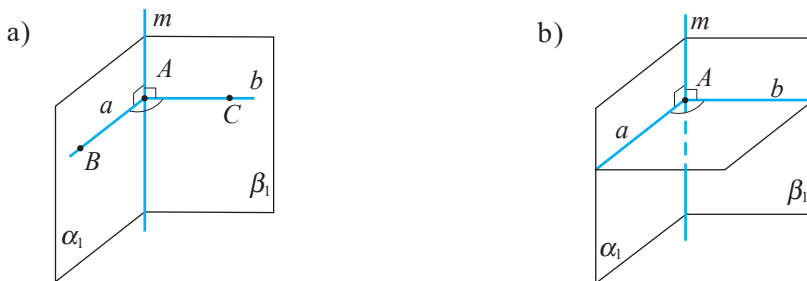


Fig. 9.18

Definiție. Intersecția unui unghi diedru cu un plan perpendicular pe muchia lui se numește **unghi liniar (unghi plan) al unghiului diedru**.

Se poate arăta că toate unghiurile liniare ale unuia și aceluiași unghi diedru sunt congruente.

Definiție. Măsură a unghiului diedru se numește măsura unui unghi liniar al acestuia.

Revenind la figura 9.18 a), scriem că

$$m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = m(\angle BAC).$$

Definiții. • Semiplanele α_1 și β_1 se numesc **perpendiculare** dacă $m(\angle(\alpha_1\beta_1)) = 90^\circ$.

• În acest caz, planele suport respective, α și β , se numesc **plane perpendiculare**.

Se notează: $\alpha_1 \perp \beta_1$, respectiv $\alpha \perp \beta$.

Teorema 12. Două plane sunt perpendiculare dacă și numai dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan.

Demonstrație

Necesitatea. Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci dreapta suport a oricărei laturi a unghiului liniar este perpendiculară pe planul ce nu o conține.

Suficiența. Fie planul α trece prin dreapta a , perpendiculară pe planul β (fig. 9.19).

Planele α și β se intersectează după dreapta c , iar dreptele a și c se intersectează în punctul A .

În planul β , prin punctul A construim o dreaptă b perpendiculară pe dreapta c . Constatăm că unghiul BAC este unghiul liniar al unghiului diedru format de planele α și β . Cum $a \perp \beta$, rezultă că $a \perp b$. Așadar, $m(\angle(\alpha\beta)) = 90^\circ$, de unde $\alpha \perp \beta$. ►

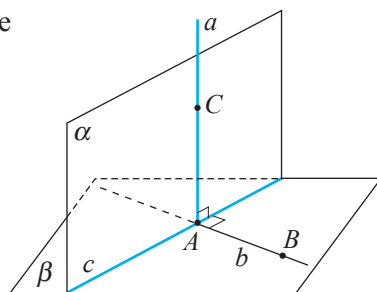
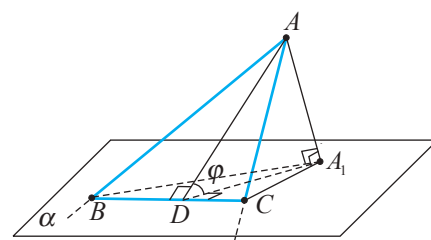


Fig. 9.19

Teorema 13. Dacă φ este măsura unghiului diedru format de planul unui triunghi ABC și un plan α , $\mathcal{A}_\Delta$ – aria triunghiului ABC , $\mathcal{A}_{pr_\alpha\Delta}$ – aria proiecției ortogonale a triunghiului ABC pe planul α , atunci $\mathcal{A}_{pr_\alpha\Delta} = \mathcal{A}_\Delta \cdot \cos\varphi$ (fig. 9.20).



$$\Delta A_1BC = pr_\alpha \Delta ABC, \quad \mathcal{A}_{\Delta A_1BC} = \mathcal{A}_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$$

Fig. 9.20

Probleme rezolvate

❧ 1. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = BC = 8$ cm și $AC = 5$ cm. Din vârfurile A și B se construiesc perpendicularele AA_1 și BB_1 în același semispațiu mărginit de planul ABC , astfel încât $AA_1 = 12$ cm și $BB_1 = 6$ cm (fig. 9.21). Să se determine:

- lungimea segmentului CD_1 , unde D_1 este mijlocul $[A_1B_1]$;
- distanța de la punctul C la dreapta A_1B_1 ;
- măsura unghiului diedru format de planele ABC și A_1B_1C .

Rezolvare:

a) Distanța de la punctul C la mijlocul D_1 al segmentului A_1B_1 se calculează folosind triunghiul dreptunghic DD_1C ($AA_1 \parallel DD_1 \Rightarrow DD_1 \perp (ABC)$). Segmentul DD_1 este linie mijlocie a trapezului AA_1B_1B , deci $DD_1 = 9$ cm, iar segmentul DC este mediană a triunghiului ABC . Folosind formula de calcul al lungimii medianei unui triunghi ($m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$), obținem că $DC = \frac{1}{2}\sqrt{114}$ cm.

Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic CDD_1 , obținem că $D_1C = \sqrt{DC^2 + DD_1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 114 + 81} = \sqrt{109,5}$ (cm).

b) Distanța de la punctul C la dreapta A_1B_1 este egală cu înălțimea triunghiului A_1CB_1 , construită din vârful C . Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic A_1AC , obținem că $A_1C = 13$ cm. În mod analog, în triunghiurile dreptunghice B_1BC și A_1KB_1 avem $B_1C = 10$ cm și respectiv $A_1B_1 = 10$ cm.

Distanța de la punctul C la dreapta A_1B_1 poate fi determinată astfel: $h_c = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{A_1B_1C}}{A_1B_1}$.

Aflăm aria triunghiului A_1B_1C folosind formula lui Heron¹:

$$\mathcal{A}_{A_1B_1C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{33}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{13}{4} \sqrt{231} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Atunci } h_c = \frac{2 \cdot \frac{13}{4} \sqrt{231}}{10} = \frac{13}{20} \sqrt{231} \text{ (cm)}.$$

c) Triunghiul ABC este proiecția triunghiului A_1B_1C pe planul triunghiului ABC . Prin urmare, măsura φ a unghiului diedru format de planele ABC și A_1B_1C se determină folosind relația $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{A_1B_1C} \cdot \cos \varphi$.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5}{4} \sqrt{231} \text{ cm}^2, \text{ deci } \cos \varphi = \frac{5}{13}, \text{ iar } \varphi = \arccos \frac{5}{13}.$$

$$\text{Răspuns: a) } \sqrt{109,5} \text{ cm; b) } \frac{13}{20} \sqrt{231} \text{ cm; c) } \varphi = \arccos \frac{5}{13}.$$

Observație. Problema 1 c) arată că măsura unui unghi diedru poate fi calculată fără a construi unghiuri liniare ale unghiului diedru respectiv.

2. Semidreptele necoplanare $[OA, [OB, [OC$ cu originea comună sunt construite astfel încât $m(\angle AOC) = m(\angle BOC) = \alpha < 90^\circ$, $m(\angle AOB) = 2\beta$ (fig. 9.22).

a) Să se demonstreze că proiecția semidreptei $[OC$ pe planul OAB este bisectoarea unghiului AOB .

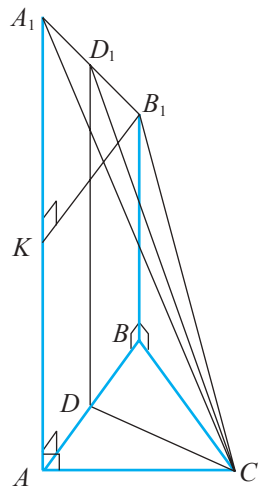
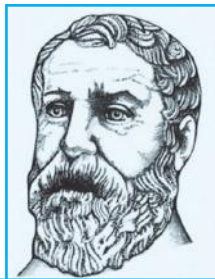


Fig. 9.21



Heron din Alexandria

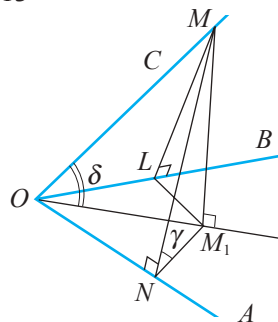


Fig. 9.22

¹ Heron din Alexandria (sec. 1 d.H.) – matematician grec.

- b) Să se determine măsura unghiului diedru care are muchia OA .
 c) Să se afle măsura unghiului format de dreapta OC și planul OAB .

Rezolvare:

a) Fie M_1 proiecția unui punct $M \in [OC]$ pe planul OAB , iar N și L punctele de intersecție a dreptelor ce trec prin punctul M și care sunt perpendiculare pe dreptele OA și respectiv OB . Dreptele NM_1 și LM_1 sunt proiecțiile dreptelor MN și respectiv ML pe planul OAB . Conform teoremei celor trei perpendiculare, $NM_1 \perp OA$ și $LM_1 \perp OB$.

Cum $\triangle ONM \stackrel{IU}{=} \triangle OLM$, rezultă că $[ON] \equiv [OL]$ și $[MN] \equiv [ML]$.

Deoarece $\triangle MNM_1 \stackrel{IC}{=} \triangle MLM_1$, rezultă că $[NM_1] \equiv [LM_1]$.

$\triangle ONM_1 \stackrel{CC}{=} \triangle OLM_1 \Rightarrow \angle NOM_1 \equiv \angle LOM_1$, adică semidreapta $[OM_1]$ este bisectoare a unghiului AOB , c.c.t.d.

- b) Din triunghiurile dreptunghice OMN , ONM_1 , MNM_1 obținem:

$$ON = OM \cos \alpha, \quad NM = OM \sin \alpha; \quad NM_1 = ON \operatorname{tg} \beta = OM \cos \alpha \operatorname{tg} \beta;$$

$$\cos \gamma = \frac{NM_1}{NM} = \frac{OM \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{OM \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta. \text{ Astfel, } \gamma = \arccos(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

- c) Din triunghiurile dreptunghice ONM_1 și MOM_1 avem:

$$OM_1 = \frac{ON}{\cos \beta} = \frac{OM \cos \alpha}{\cos \beta}, \quad \cos \delta = \frac{OM_1}{OM} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \text{ de unde } \delta = \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right).$$

$$\text{Răspuns: b) } \gamma = \arccos(\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta); \quad \text{c) } \delta = \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right).$$

3. Se știe că punctul M , care nu se conține în planul unui poligon, este egal depărtat de vârfurile acestuia. Să se demonstreze că acest poligon este inscriptibil.

Rezolvare:

Fie punctul M nu aparține planului poligonului $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ și $[MA_1] \equiv [MA_2] \equiv [MA_3] \equiv \dots \equiv [MA_n]$ (fig. 9.23). Punctul O este proiecția punctului M pe planul poligonului. Atunci triunghiurile OMA_1 , OMA_2 , OMA_3 , ..., OMA_n sunt dreptunghice și congruente (criteriul IC), de unde deducem că $[OA_1] \equiv [OA_2] \equiv \dots \equiv [OA_n]$. Prin urmare, punctul O din planul poligonului este egal depărtat de vârfurile lui, adică poligonul este inscriptibil și punctul O este centrul cercului circumscris.

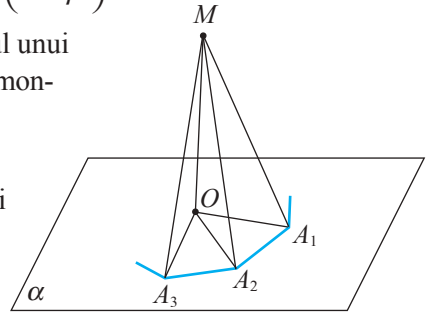


Fig. 9.23

Observație. Punctele dreptei OM sunt egal depărtate de vârfurile poligonului $A_1 \dots A_n$.

4. În una dintre fețele unghiului diedru $\angle(\alpha\beta)$ de măsură φ este dusă dreapta AD , care formează cu muchia b a unghiului diedru un unghi de măsură δ (fig. 9.24). Să se determine măsura γ a unghiului format de dreapta AD cu cealaltă față a unghiului diedru.

Rezolvare:

Fie $\angle ABC$ unghiul liniar al unghiului diedru $\angle(\alpha\beta)$. Conform condiției, $m(\angle ABC) = \varphi$, $m(\angle ADB) = \delta$. Deoarece $AC \perp \beta$, rezultă că $\angle ADC$ este cel vizat în problemă. Din triunghiurile dreptunghice ABD , ACB și ACD avem: $AB = AD \sin \delta$,

$$AC = AB \sin \varphi = AD \sin \delta \sin \varphi, \quad AC = AD \sin \gamma.$$

De aici obținem $AD \sin \gamma = AD \sin \delta \sin \varphi$.

Prin urmare, $\sin \gamma = \sin \delta \sin \varphi$. Deci, $\gamma = \arcsin(\sin \delta \cdot \sin \varphi)$.

5. Fie punctul $A \notin \alpha$ și din acest punct sunt construite oblica AB și perpendiculara AO pe planul α , unde B este piciorul oblicei, iar O – piciorul perpendicularei. Prin piciorul oblicei este construită în planul α dreapta BC , care formează cu proiecția oblicei un unghi de măsură δ . Fie φ și γ mărimile unghiurilor formate de oblica AB cu proiecția ei OB și respectiv cu dreapta BC (fig. 9.25). Să se arate că $\cos \gamma = \cos \varphi \cos \delta$.

Rezolvare:

Construim în planul α dreapta $OD \perp BC$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $AD \perp BC$. Fie $AB = x$. Atunci din triunghiurile dreptunghice AOB , BDO și ADB obținem: $BO = x \cos \varphi$, $BD = BO \cos \delta = x \cos \varphi \cos \delta$, $BD = x \cos \gamma$.

De aici rezultă: $\cos \gamma = \cos \varphi \cos \delta$.

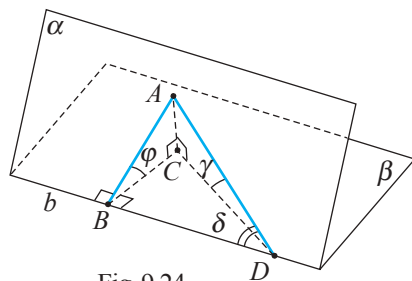


Fig. 9.24

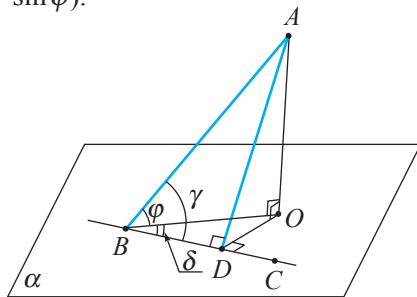


Fig. 9.25

Probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

- A 1. Triunghiurile echilaterale ABC și ABD au o latură comună AB și planele suport ale acestor triunghiuri formează un unghi diedru drept. Să se determine lungimea segmentului CD , dacă $AB = 2$ cm.
- B 2. Laturile triunghiului echilateral ABC sunt de 3 cm. Latura AB a triunghiului este situată în planul α . Unghiul diedru format de planul ABC și planul α are măsura de 30° . Să se afle:
 - a) lungimea proiecției medianei triunghiului ABC corespunzătoare vârfului C pe planul α ;
 - b) distanța de la punctul C la planul α .
- C 3.  **Lucrați în perechi!** Prin baza mică a unui trapez este construit un plan. Distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor trapezului la plan este de 6 cm, iar raportul lungimilor bazelor este $3 : 2$. Să se afle distanța de la baza mare la planul construit.
4. Prin una dintre laturile unui paralelogram este construit un plan. Distanța de la latura opusă până la plan este de 10 cm. Să se determine distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului până la plan.
5. **Activitate practică.** Determinarea relațiilor de perpendicularitate în curtea școlii.
6.  **Lucrați în grup!** Proiect **Aplicarea elementelor de perpendicularitate în construcțiile edificiilor din localitate.**

Profilul real

- A₁** 1. Triunghiul $A_1B_1C_1$ este proiecția ortogonală a $\triangle ABC$ pe planul α . Să se afle cosinusul unghiului diedru format de planul ABC cu planul α , dacă $AA_1 = BB_1 = 3$ cm, $CC_1 = 8$ cm, $A_1B_1 = 13$ cm, $A_1C_1 = C_1B_1 = 12$ cm.
- B₁** 2. Punctul E este egal depărtat de laturile rombului $ABCD$ și nu aparține planului suport al rombului. Să se demonstreze că:
- proiecția punctului E pe planul rombului coincide cu punctul de intersecție a diagonalelor rombului;
 - cele patru unghiuri diedre formate de planele EAB, EBC, ECD, EDA cu planul α sunt congruente.
3. Fie $ABCD$ un patrulater convex și punctul E , astfel încât cele patru unghiuri diedre formate de planele EAB, EBC, ECD, EDA cu planul patrulaterului sunt congruente. Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil și că proiecția punctului E pe planul patrulaterului $ABCD$ este egal depărtată de laturile lui.
- C₁** 4. Triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) și triunghiul echilateral ADE se află în plane diferite și au o mediană comună, AF . Să se demonstreze că dreapta AF este perpendiculară pe planul determinat de punctele F, B, D .
5. Prin una dintre catetele triunghiului dreptunghic isoscel s-a construit un plan care formează cu cealaltă catetă un unghi de 45° . Să se afle măsura unghiului format de ipotenuză și acest plan.
6. În trapezul $ABCD$, $m(\angle BAD) = 60^\circ$. Prin baza mare AB este dus un plan care formează cu latura AD un unghi de 45° . Să se afle raportul dintre aria trapezului și aria proiecției lui pe acest plan.
7. **Activitate practică.** Determinarea relațiilor de perpendicularitate în curtea școlii.
8.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicarea elementelor de perpendicularitate în spațiu în construcțiile edificiilor din localitate.*

Probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport

- A** 1. Dreptele AB, AC și AD sunt perpendiculare. Să se afle lungimea segmentului CD , știind că:
- $AB = 6$ cm, $BC = 14$ cm, $AD = 3$ cm;
 - $BD = 18$ cm, $BC = 32$ cm, $AD = 10$ cm;
 - $AB = m$, $BC = n$, $AD = p$;
 - $BD = s$, $BC = n$, $AD = p$.
2. Distanța de la punctul M la vârfurile unui triunghi echilateral este b . Să se afle distanța de la punctul M la planul triunghiului, dacă latura triunghiului are lungimea a , iar $b > \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
3.  **Lucrați în perechi!** Din vârful B al trapezului isoscel $ABCD$ ($AD \parallel BC$) pe planul acestuia este construită perpendiculara BE cu lungimea de 4 cm. Să se determine distanțele d_1 și d_2 de la punctul E la dreptele CD și respectiv AD , știind că înălțimea trapezului este de 4 cm, $BC = 4$ cm și $AD = 12$ cm.
- B** 4. Din vârful A al hexagonului regulat $ABCDEF$ pe planul acestuia este construită perpendiculara AM , astfel încât $AM = AB$. Să se afle măsura unghiurilor formate de planele:
- MDC și AEF ;
 - DCM și DEM .

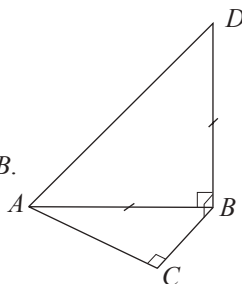
5. Punctul D este egal depărtat de laturile triunghiului ABC . Știind că $AB = AC = 6$ cm, $BC = 4$ cm și că distanța de la punctul D la planul triunghiului este de $\sqrt{2}$ cm, să se afle distanțele de la punctul D la laturile triunghiului.
- C 6. Un cablu trebuie întins de la un stâlp cu înălțimea de 8 m pe acoperișul unei clădiri cu înălțimea de 20 m. Distanța dintre stâlp și clădire este de 9 m. Să se determine lungimea cablului.

Profilul real

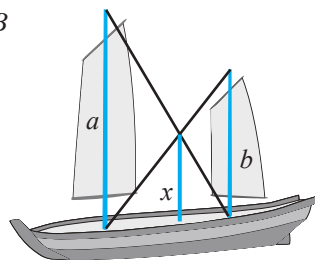
- A₁ 1. Se știe că punctul M , care nu aparține planului unui poligon, este egal depărtat de laturile poligonului. Să se demonstreze că acest poligon este circumscris unui cerc.
2. Punctul M este egal depărtat de laturile poligonului $ABCDE$. Să se arate că unghiurile diedre formate de planele AMB , BMC , CMD , DME , EMA cu planul ABC au aceeași măsură.
3.  **Lucrați în perechi!** Dreapta a intersectează planul α , iar P este un punct situat în acest plan. Există în planul α o dreaptă ce trece prin P și care este perpendiculară pe dreapta a ?
4. Prin vârful unghiului ascuțit al unui triunghi dreptunghic este construit un plan α paralel cu o catetă a acestui triunghi. Catetele sunt de 30 cm și 40 cm, iar proiecția catetei mai mari pe planul α este de $2\sqrt{31}$ cm. Să se afle lungimea proiecției ipotenuzei pe planul α .
- B₁ 5. Punctul M este egal depărtat de vârfurile unui hexagon regulat cu latura de lungime a . Să se determine distanța de la punctul M la planul hexagonului, dacă distanța de la punctul M la un vârf al hexagonului este b .

6. Punctul C nu aparține planului unghiului drept AOB și este egal depărtat de laturile unghiului. Să se afle distanța de la punctul C la planul unghiului, știind că $CO = a$, iar distanța de la punctul C la o latură a unghiului este b .

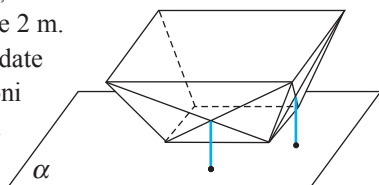
7. (BAC, 2011) Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:
„Triunghiul ABC este dreptunghic ($m(\angle ACB) = 90^\circ$), $BD \perp (ABC)$, $AB = DB$.
 $m(\angle DAB) + m(\angle DCA) = \square$ ”.



- C₁ 8. Două catarge ale unui iaht sunt unite cu funii, astfel încât fiecare vârf al unui catarg este unit cu baza celui alt catarg. La ce distanță de la puntea iahtului se află punctul de intersecție a funiilor, dacă înălțimile catargelor sunt a și b ?



9. Coșul de recepție a grăunțelor la o moară are patru pereți în formă de trapeze isoscele cu bazele de 0,4 m și 1,2 m. Distanța dintre planul orificiului de sus și planul bazei coșului este de 2 m. Pentru a mări rigiditatea pereților coșului, au fost sudate bare de fier de-a lungul diagonalelor fiecărei fețe și piloni verticali din punctul de intersecție a acestor bare până la planul bazei coșului. Să se determine înălțimea pilonilor.



Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilurile umanist, arte, sport

1. Determinați distanța de la mijlocul segmentului AB la un plan ce nu intersectează acest segment, dacă distanțele de la punctele A și B la plan sunt de 2,4 cm și respectiv 4,6 cm. ④
2. Lungimea laturii unui triunghi echilateral este de 6 cm. Un punct, care nu este conținut de planul triunghiului, se află la distanța de 3 cm de fiecare latură a triunghiului. Aflați distanța de la acest punct la planul triunghiului dat. ⑥
3. Punctul M este situat la distanțe egale de la vârfurile unui dreptunghi cu dimensiunile de 4 cm și 10 cm. Determinați distanța de la punctul M la dreptele suport ale laturilor dreptunghiului, dacă distanța de la punctul M la planul dreptunghiului este de 5 cm. ⑥
4. Latura triunghiului echilateral ABC este de 12 cm. Dreptele MA , MB , MC formează cu planul triunghiului ABC unghiuri congruente de 30° . Aflați distanța de la punctul M la planul triunghiului ABC . ⑦

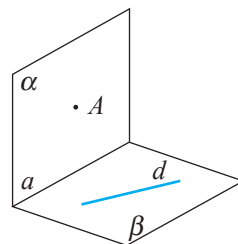
Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	23–22	21–20	19–17	16–14	13–11	10–8	7–6	5–4	3–2	1–0

Profilul real

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

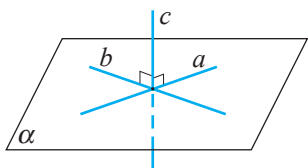
1. Un segment intersectează un plan. Extremitățile segmentului sunt situate la distanțele a și b de la plan. Aflați distanța de la mijlocul segmentului la acest plan. ③
2. Prin mediana unui triunghi este construit un plan. Demonstrați că vârfurile triunghiului, ce nu aparțin planului construit, sunt egal depărtate de acest plan. ⑥
3. Lungimile laturilor unui triunghi isoscel ABC sunt de 5 cm, 5 cm și 2 cm. Distanța de la punctul M la planul ABC este de 8 cm, iar proiecția lui pe planul ABC coincide cu mijlocul celei mai mari înălțimi a triunghiului. Determinați distanța de la punctul M la laturile triunghiului. ⑥
4. Aflați măsura unghiului format de muchia laterală și planul bazei unei piramide patrulater, dacă se știe că toate muchiile ei sunt congruente. ④
5. Unghiul diedru $\angle(\alpha\beta)$ este drept. Punctul $A \in \alpha$, dreapta $d \subset \beta$. Să se construiască punctul M , proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta d , indicând construcțiile ajutoare în planele α și β . ⑤



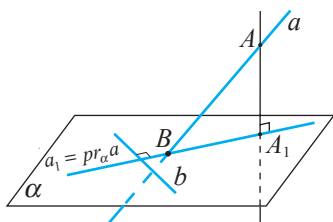
Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	24–23	22–21	20–18	17–15	14–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

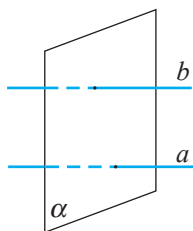
Perpendicularitatea în spațiu



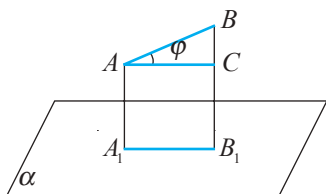
$$(a \subset \alpha, b \subset \alpha, \alpha \parallel b, c \perp a, c \perp b) \Rightarrow c \perp \alpha$$



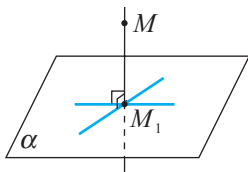
$$(a \perp \alpha, AB - \text{oblică}, B \in \alpha, A_1 \in \alpha, A_1 B \perp b) \Rightarrow AB \perp b$$



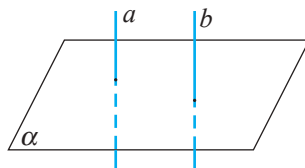
$$(a \perp \alpha, b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b$$



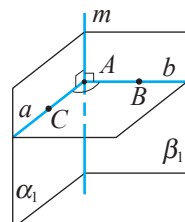
$$([A_1 B_1] \equiv pr_\alpha [AB], AC \parallel A_1 B_1) \Rightarrow \Rightarrow \text{lungimea proiecției } [AB] \text{ este } AB \cos \varphi$$



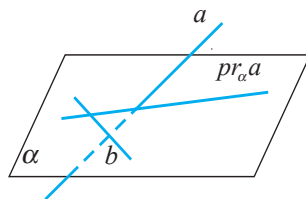
$$(MM_1 \perp \alpha, M_1 \in \alpha) \Rightarrow \text{lungimea } MM_1 \text{ este egală cu distanța de la punctul } M \text{ la planul } \alpha$$



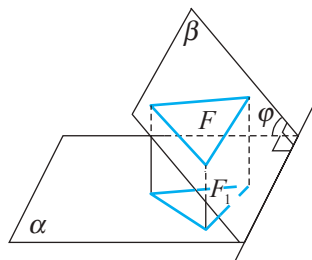
$$(a \parallel b, a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha$$



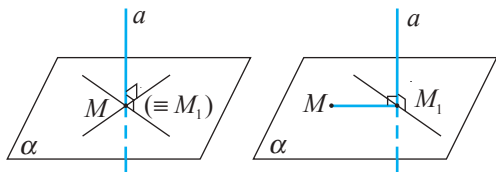
$$\angle(\alpha_1 \beta_1) - \text{unghi diedru}, \alpha \cap \beta = m, (ABC) \perp m, m(\angle(\alpha_1 \beta_1)) = m(\angle BAC)$$



$$b \subset \alpha \quad \begin{array}{l} 1) a \perp b \Rightarrow pr_\alpha a \perp b \\ 2) b \perp pr_\alpha a \Rightarrow a \perp b \end{array}$$



$$(F \subset \beta, F_1 = pr_\alpha F, m(\angle(\alpha \beta)) = \varphi) \Rightarrow \Rightarrow \mathcal{A}_{F_1} = \mathcal{A}_F \cos \varphi$$



$$a \perp \alpha, M, M_1 \in \alpha, M_1 \in a, MM_1 - \text{distanța de la punctul } M \text{ la dreapta } a$$

Obiective

- ⇒ recunoașterea în situații variate și utilizarea în diferite contexte a noțiunilor: *simetrie axială*, *simetrie centrală*, *simetrie față de un plan*, *translație*, *asemănare*, *rotație în spațiu*;
- ⇒ utilizarea terminologiei aferente transformărilor geometrice în diverse contexte;
- ⇒ construirea imaginilor unor figuri obținute în urma transformărilor geometrice studiate;
- ⇒ utilizarea transformărilor geometrice în rezolvări de probleme;
- ⇒ aplicarea transformărilor geometrice pentru a identifica și explica procese, fenomene din diverse domenii.

În clasele anterioare s-au studiat simetria axială, simetria centrală, translația, asemănarea în plan. De asemenea, a fost definită congruența triunghiurilor. Congruența figurilor mai complicate se definește cu ajutorul transformărilor geometrice, care au o aplicație largă. De exemplu, pentru a elabora un program ce permite vizualizarea pe ecranul calculatorului a unei figuri spațiale în mișcare sunt necesare transformările geometrice.

§1 Noțiunea de transformare geometrică. Transformări izometrice

Fie X și Y mulțimi nevide de puncte din spațiu. Amintim că dacă fiecărui punct x al mulțimii X i se asociază un singur punct y al mulțimii Y , atunci este definită o **aplicație** a mulțimii X în mulțimea Y . Se notează: $f: X \rightarrow Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$. Punctul $y = f(x)$ se numește **imaginea** punctului $x \in X$, iar x este o **preimage** a punctului $y \in Y$. Se mai spune că punctul x se aplică pe punctul y la aplicația f .

Exemple

1. Fie α un plan și d o dreaptă ce intersectează acest plan. Prin orice punct M al spațiului trece o singură dreaptă paralelă cu dreapta d . Fie M' punctul de intersecție a acestei drepte cu planul α (fig. 10.1).

Aplicația spațiului în planul α , care îi asociază fiecărui punct M al spațiului un punct $M' \in \alpha$, astfel încât $MM' \parallel d$, se numește **proiecție paralelă** a spațiului pe planul α în direcția dreptei d .

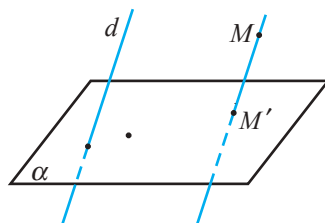


Fig. 10.1

2. Fie O un punct din spațiu. Aplicația spațiului în el însuși, care îi asociază fiecărui punct M diferit de O un punct M' , astfel încât punctul O este mijlocul segmentului MM' ,

iar punctului O – însuși punctul O , se numește **simetrie centrală** de centru O a spațiului (fig. 10.2).

Se notează: S_O .

Punctul O se numește în acest caz **centru de simetrie**.

Evident, dacă la simetria centrală, punctul M' este imaginea punctului M , atunci punctul M este imaginea punctului M' ; se spune că M și M' sunt **simetrice** față de centrul de simetrie.

Observăm că la proiectarea paralelă a spațiului pe un plan orice punct din plan posedă mai multe preimagini, iar la simetria centrală orice punct posedă o singură preimagine.

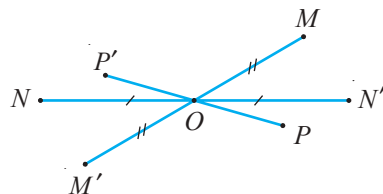


Fig. 10.2

Definiție. Orice aplicație a spațiului pe el însuși la care fiecare punct posedă o singură preimagine se numește **transformare geometrică** a spațiului.

În continuare, pentru a ne exprima mai laconic, vom folosi cuvântul „transformare” în loc de „transformare geometrică”.

Fie F o figură din spațiu și g o transformare a spațiului. Figura $F' = g(F)$, ce constă din imaginile tuturor punctelor figurii F la transformarea g , se numește **imagine** a figurii F la transformarea g .

Deoarece transformările sunt un caz particular al aplicațiilor, ele posedă toate proprietățile generale ale aplicațiilor. Astfel, compunerea transformărilor este o transformare; are loc legea asociativă a compunerii transformărilor, se poate defini restricția transformării la o figură etc.

Dacă prin transformarea g figura F se aplică pe ea însăși, adică $g(F) = F$, atunci restricția transformării g la figura F se numește **transformare de simetrie** a figurii F . Pentru concizie, vom spune că g este transformare de simetrie a figurii F .

Definiție. Transformarea g a spațiului se numește **transformare de izometrie** (sau **izometrie**) a spațiului dacă pentru orice două puncte M și N ale spațiului și imaginile lor $M' = g(M)$, $N' = g(N)$ are loc egalitatea $MN = M'N'$.

Altfel spus, izometria este aplicația spațiului în el însuși care păstrează distanțele. Izometriile se mai numesc și **deplasări** sau **mișcări** ale spațiului.

Evident, transformarea identică a spațiului, adică transformarea care aplică fiecare punct al spațiului pe el însuși, este o izometrie.

Două figuri se numesc **congruente** dacă există o izometrie care aplică una dintre aceste figuri pe cealaltă.

Teorema 1. Orice izometrie aplică trei puncte coliniare pe trei puncte coliniare. De asemenea, izometria aplică un punct situat între alte două puncte pe un punct situat între imaginile acestor două puncte.

Demonstrație

Fie A, B, C puncte coliniare distincte. Atunci unul și numai unul dintre ele este situat între celelalte două. Fie B situat între A și C . Astfel, are loc egalitatea $AB + BC = AC$.

Fie A', B', C' imaginile respective ale punctelor A, B, C la o izometrie. Din definiția izometriei rezultă egalitățile $AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'$, iar din ele rezultă egalitatea $A'B' + B'C' = A'C'$. Adică B' este situat între A' și C' , iar aceasta înseamnă că punctele A', B', C' sunt coliniare. ►

Definiție. Punctul A se numește **punct invariant** al izometriei g dacă $g(A) = A$; dreapta d se numește **dreaptă invariantă** a lui g dacă $g(d) = d$; planul α se numește **plan invariant** al lui g dacă $g(\alpha) = \alpha$.

Dacă toate punctele unei drepte sunt puncte invariante ale izometriei g , atunci această dreaptă se numește **invariantă punct cu punct** la această izometrie.

Problemă rezolvată

☞ Să se arate că dacă o izometrie nu are puncte invariante, atunci dreptele invariante ale acestei izometrie (în cazul în care există) sunt paralele.

Rezolvare:

Presupunem contrariul, fie a și b drepte invariante neparalele la izometria dată g . Deci, aceste drepte se intersectează sau sunt necoplanare. Dacă dreptele a și b se intersectează în punctul M , atunci punctul $M' = g(M)$ aparține acestor drepte (invariante), adică $g(M) = M$. Aceasta contrazice ipoteza problemei. În cazul în care dreptele a și b sunt necoplanare, există perpendiculara lor comună AB , $A \in a$, $B \in b$. Deoarece AB este cea mai mică distanță dintre dreptele a și b , rezultă că punctele A și B sunt puncte invariante la izometria g și iarăși obținem o contradicție.

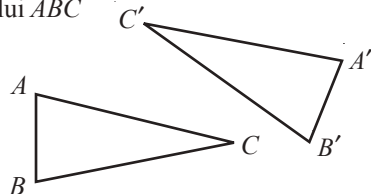
Probleme propuse

Profilul real

- A₁** 1. Să se dea exemple de transformări geometrice în spațiu din diverse domenii.
2. Să se decidă dacă proiectarea paralelă a spațiului pe un plan este o izometrie.
- B₁** 3. Fie unghiul AOB și f o aplicație a spațiului în el însuși, astfel încât au loc următoarele două condiții:
- imaginea oricărui punct M al spațiului, ce nu aparține unghiului AOB , este însuși acest punct M ;
 - imaginea oricărui punct ce aparține unghiului AOB este simetricul lui față de bisectoarea acestui unghi.
- Este această aplicație o transformare geometrică a spațiului? Dar o izometrie?
4. În urma unei transformări geometrice a spațiului, o figură se aplică pe ea însăși. Este oare o astfel de transformare o izometrie a spațiului? Să se dea exemple.
5. Să se demonstreze că orice izometrie aplică:
- un segment pe un segment congruent cu el;
 - un triunghi pe un triunghi congruent cu el.
6. Să se demonstreze că orice izometrie aplică un unghi pe un unghi congruent cu el.
7. Să se demonstreze că aplicația inversă izometriei este de asemenea o izometrie.

8.  **Lucrați în perechi!** Fie $\Delta A'B'C'$ imaginea triunghiului ABC la izometria g . Să se construiască imaginea:

- a) medianei BK ; b) bisectoarei BL ;
c) înălțimii BM ; d) centrului de greutate G ;
e) centrului cercului înscris I ; f) ortocentrului H ;
g) centrului O al cercului circumscris triunghiului ABC
la această izometrie.



9. a) Să se arate că dacă A și B sunt puncte invariante distincte ale izometriei f , atunci orice punct al dreptei AB este invariant.
b) Poate oare izometria spațiului să posedă exact două puncte invariante distincte?
10.  **Investigați!** a) Să se arate că dacă A, B, C sunt puncte necoliniare invariante ale izometriei f , atunci orice punct al planului ABC este invariant.
b) Să se decidă dacă izometria spațiului posedă exact trei puncte invariante.

C₁ 11. Izometria f are un punct invariant.

- a) Are oare un punct invariant izometria f^{-1} ? b) Dar izometria $f \circ f$?

12. Izometria f posedă următoarea proprietate: pentru un punct A , $f(A) = B$, iar $f(B) = A$. Să se decidă dacă izometria $f \circ f$ are puncte invariante.

§2 Simetria centrală

În § 1 am definit simetria spațiului față de un punct și am numit-o simetrie centrală.

Teorema 2. Simetria centrală a spațiului este o izometrie.

Demonstrație

Presupunem că simetria centrală S_O aplică punctele arbitrare M și N ale spațiului pe punctele M' și respectiv N' .

Dacă punctele M, N și O sunt necoliniare (fig. 10.3 a)), afirmația teoremei rezultă din congruența triunghiurilor MON și $M'ON'$ (criteriul LUL), deci $MN = M'N'$.

Dacă punctele M, N și O sunt coliniare și, de exemplu, M este situat între O și N (fig. 10.3 b)), atunci

$$MN = ON - OM = ON' - OM' = M'N'.$$

Analog se obține egalitatea $MN = M'N'$ și în celelalte cazuri de amplasare a punctelor M, N și O pe aceeași dreaptă. Așadar, simetria centrală păstrează distanțele dintre puncte, prin urmare, este o izometrie. ►

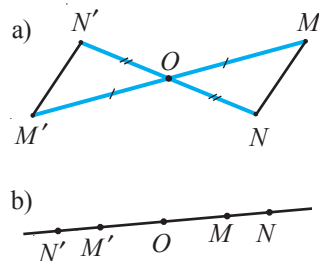


Fig. 10.3

Definiție. Figurile F și F' se numesc **simetrice** față de punctul O dacă $S_O(F) = F'$.

În particular, dacă figura F este simetrică cu ea însăși față de punctul O , atunci F se numește **figură central simetrică**, iar O se numește **centru de simetrie al figurii F** . De exemplu, cercul, pătratul, sfera sunt figuri central simetrice.

Problemă rezolvată

🔗 Punctul A este situat în interiorul unghiului BOC (fig. 10.4). Să se construiască segmentul cu extremitățile pe laturile acestui unghi, astfel încât mijlocul lui să fie punctul A .

Rezolvare:

Prin punctul $O' = S_A(O)$ ducem dreptele $O'C'$ și $O'B'$ paralele cu OC și respectiv OB . Segmentul DE , unde $D \in O'C' \cap OB$ și $E \in O'B' \cap OC$, este segmentul care trebuie construit.

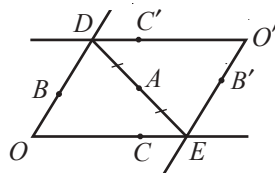


Fig. 10.4

Probleme propuse

Profilul real

- A₁** 1. Să se dea exemple de figuri geometrice central simetrice.
2. Să se stabilească dacă sunt simetrice orice două puncte ale spațiului față de un al treilea punct al spațiului.
3. 👤👤 **Lucrați în perechi!** Câte centre de simetrie are figura formată din două drepte paralele? Ce figură reprezintă mulțimea acestor centre?
4. Să se decidă dacă sunt simetrice față de un punct două segmente necongruente.
5. Pot oare să fie simetrice față de un punct două segmente concurente? Dar neconcurente?
- B₁** 6. Punctele A, B, C, D sunt situate în spațiu, astfel încât A și C sunt simetrice față de B , iar B și D sunt simetrice față de C . Ce se mai poate spune despre amplasarea acestor puncte?
7. Să se construiască simetricul unui triunghi față de:
- a) un vârf al triunghiului; b) mijlocul unei laturi a triunghiului.
8. Să se decidă dacă există puncte, drepte și plane invariante la o simetrie centrală.
9. Ce aplicație reprezintă compunerea $S_o \circ S_o$?
10. 👤👤 **Lucrați în perechi!** Poate fi un triunghi figură central simetrică?
11. Să se demonstreze că aplicația inversă unei simetrii centrale este aceeași simetrie centrală.
12. Să se demonstreze că simetria centrală aplică:
- a) orice plan pe un plan paralel cu el;
- b) orice două plane paralele pe două plane paralele;
- c) două plane ce se intersectează după o dreaptă pe două plane ce se intersectează după imaginea dreptei respective;
- d) două plane perpendiculare pe două plane perpendiculare.
13. Să se arate că, la o simetrie centrală, orice dreaptă și imaginea ei sunt coplanare.
- C₁** 14. 👤👤 **Lucrați în perechi!** Fie punctul A și figura F , $A \notin F$. Se consideră mulțimea tuturor punctelor spațiului simetrice punctului A față de toate punctele figurii F . Să se determine această mulțime, dacă figura F este:
- a) un segment; b) o dreaptă; c) un plan.
15. Să se arate că dacă figura $F = [AB] \cup [CD]$ este central simetrică, atunci și figura $[AC] \cup [BD]$ este central simetrică față de același centru.

§3 Simetria axială

Fie dreapta d și punctul $A \notin d$. Punctul A' se numește **simetricul** punctului A față de dreapta d dacă $AA' \perp d$, $AA' \cap d = \{M\}$ și $AM = A'M$. Punctele dreptei d se numesc simetrice cu ele înseși față de această dreaptă.

Definiție. Transformarea spațiului care aplică fiecare punct al spațiului pe simetricul său față de dreapta dată d se numește **simetrie a spațiului față de dreapta d** sau **simetrie axială de axă d** .

Se notează: S_d , $S_d(A) = A'$, $S_d(B) = B'$ (fig. 10.5).

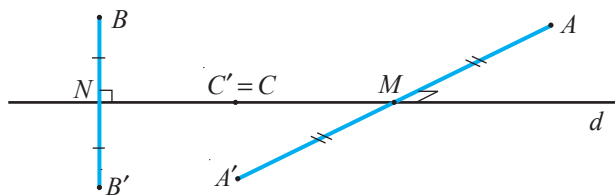


Fig. 10.5



Teorema 3. Simetria axială a spațiului este o izometrie.

Demonstrație

Presupunem că simetria axială de axă d aplică punctele arbitrare A și B pe punctele A' și respectiv B' . Să demonstrăm că $AB = A'B'$. Dacă dreptele AB și d sunt coplanare, atunci este evident că $AB = A'B'$. Presupunem că dreptele AB și d sunt necoplanare (fig. 10.6) și $BB' \cap d = \{N\}$. Ducem prin punctul N dreapta paralelă cu AA' și construim pe ea segmentele simetrice A_1N și NA'_1 , astfel încât $A_1A'_1 = AA'$. Patrulaterul $AA_1A'_1A'$ este dreptunghi și, prin urmare, $AA_1 = A'_1A'_1$. Cum axa d este perpendiculară pe dreptele BB' și $A_1A'_1$, ea este perpendiculară și pe planul determinat de aceste drepte. De aici și din faptul că $AA_1 \parallel d \parallel A'_1A'_1$ rezultă că $AA_1 \perp A_1B$ și $A'_1A'_1 \perp A'_1B'$. Din congruența triunghiurilor A_1NB și A'_1NB' rezultă că $BA_1 = B'_1A'_1$. Având catetele congruente, rezultă că triunghiurile dreptunghice AA_1B și $A'_1A'_1B'$ sunt congruente și deci $AB = A'B'$. ►

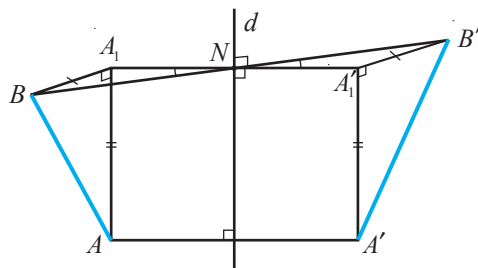


Fig. 10.6

Dacă la simetria axială S_d , figura F' este imaginea figurii date F , adică $F' = S_d(F)$, atunci aceste figuri se numesc **simetrice față de dreapta d** .

Dreapta d este o axă de simetrie a figurii F , dacă simetria axială de axă d aplică această figură pe ea însăși: $S_d(F) = F$. De exemplu, dreptele ce conțin diagonalele și mediatoarele laturilor pătratului sunt axe de simetrie ale acestuia; orice dreaptă ce trece prin centrul cercului și aparține planului cercului sau este perpendiculară pe el este o axă de simetrie a cercului.

Problemă rezolvată

Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC cu $m(\angle A) < 90^\circ$ sunt date punctele fixe P și respectiv Q (fig. 10.7). Să se determine pe latura BC punctul X_1 , astfel încât perimetrul ΔPQX să fie minim.

Rezolvare:

Fie $P_1 = S_{BC}(P)$, atunci $P_1X = PX, \forall X \in (BC)$.

Perimetrul ΔPQX este minim dacă suma $P_1X + XQ$ este minimă; deci $X = X_1$, unde $\{X_1\} = BC \cap P_1Q$.

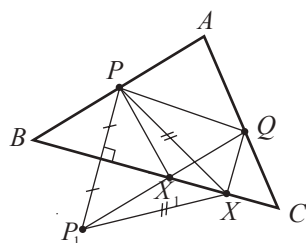
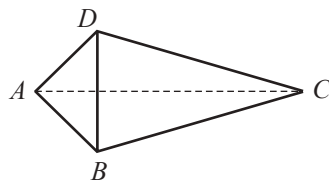


Fig. 10.7

Probleme propuse

Profilul real

- A₁** 1. Să se dea exemple de figuri geometrice care:
a) au cel puțin o axă de simetrie; b) nu au axă de simetrie.
- B₁** 2. Să se determine axele de simetrie ale cubului.
3. Să se construiască imaginea unui cub la simetria axială față de:
a) dreapta suport a unei muchii a cubului;
b) dreapta suport a diagonalei unei fețe.
4. Fie punctele distincte A și B . Să se indice axele tuturor simetriilor axiale care aplică A pe B .
Ce figură este reuniunea tuturor acestor axe?
5.  **Lucrați în perechi!** Să se indice toate axele de simetrie ale:
a) unui segment; b) unei semidrepte; c) unei drepte;
d) unui plan; e) unui paralelogram.
6. Să se determine care poate fi poziția reciprocă la simetria axială:
a) a unei drepte și a imaginii ei; b) a unui plan și a imaginii lui.
7.  **Lucrați în perechi!** Să se determine:
a) dreptele invariante ale simetriei S_d ;
b) dreptele invariante punct cu punct ale simetriei S_d .
- C₁** 8. Să se determine poziția reciprocă a axei de simetrie d și a imaginii α' a planului dat α la simetria S_d , dacă:
a) $\alpha \supset d$; b) $d \perp \alpha$; c) d este oblică față de α .
9. Să se construiască imaginea figurii reprezentate la simetria față de dreapta AB , dacă punctele A, B, C, D sunt necoplanare, ABC și ABD sunt triunghiuri isoscele cu baza comună AB .
10.  **Investigați!** Să se de exemple de simetrii axiale în biologie, în fizică, în natură, în tehnică, în arte, în construcții și în alte domenii.



§4 Simetria față de un plan

Fie planul α și punctele A, A' ce nu aparțin acestui plan. Punctele A și A' se numesc **simetrice față de planul α** dacă acest plan este **planul mediator** al segmentului AA' , adică planul α este perpendicular pe segmentul AA' și îl împarte în jumătate. Orice punct B al planului α se consideră simetric cu el însuși (fig. 10.8).

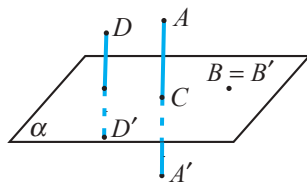


Fig. 10.8

Definiție. Transformarea spațiului care aplică orice punct al spațiului pe simetricul lui față de un plan dat α se numește **simetrie a spațiului față de planul α** .

Se notează: S_α .

Planul α se numește **plan de simetrie**.

Dacă pentru figura F are loc relația $F = S_\alpha(F)$, planul α se numește **plan de simetrie al figurii F** , iar figura F se numește **figură simetrică față de planul α** .

De exemplu, cilindrul circular drept este simetric față de orice plan ce conține axa lui.

Problemă rezolvată

Planele α și β sunt perpendiculare (fig. 10.9). Patrulaterul $ABCD$ și $AECF$ sunt romburi. Să se demonstreze că $EBFD$ este romb.

Rezolvare:

Observăm că la simetria S_α , $S_\alpha([FB]) = [BE]$,
 $S_\alpha([FD]) = [DE]$.

Prin urmare, $[FB] \equiv [BE]$, $[FD] \equiv [DE]$.

În mod analog, la simetria S_β ,

$S_\beta([FB]) = [FD]$, adică $[FB] \equiv [FD]$.

Astfel, patrulaterul $EBFD$ are toate laturile congruente, adică este romb.

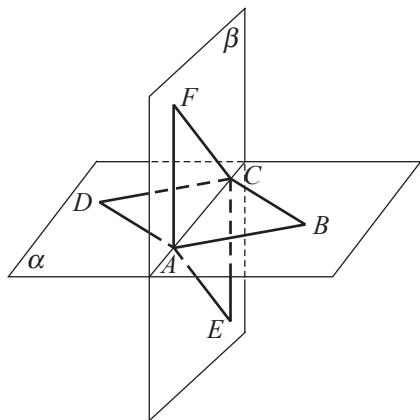


Fig. 10.9

Probleme propuse

Profilul real

- A₁** 1. Să se dea exemple de figuri geometrice care au plane de simetrie.
2. Să se determine dreptele care se aplică pe ele înseși la simetria față de un plan.
- B₁** 3. Să se indice planele de simetrie (dacă ele există) ale:
 - a) unui segment;
 - b) unei drepte;
 - c) unui plan;
 - d) reuniunii a două drepte concurente;
 - e) reuniunii a două drepte paralele;
 - f) reuniunii a două plane paralele.
4.  **Lucrați în perechi!** Se știe că segmentele AB și $A'B'$ sunt simetrice față de un plan. Sunt oare coplanare sau necoplanare dreptele lor suport?
5. Fie $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ un cub. Să se reprezinte simetricul punctului A față de planul:
 - a) $CC_1 D_1$;
 - b) BDD_1 ;
 - c) CDA_1 ;
 - d) BDC_1 ;
 - e) BCB_1 .

6. Două plane reciproc perpendiculare se intersectează după dreapta d . Punctele A și B sunt simetricele punctului C față de aceste plane. Să se afle distanța de la punctul C până la dreapta d , dacă $AB = 10$ m.
7. Să se demonstreze că simetria spațiului față de un plan α :
- a) este o izometrie;
 - b) coincide cu inversa sa, adică $S_\alpha = S_\alpha^{-1}$;
 - c) aplică orice dreaptă pe o dreaptă și orice plan pe un plan.
- C₁** 8. Planul α este simetricul planului β față de planul γ . Care poate fi poziția reciprocă a planelor α și β ?
9. Punctele A și B sunt situate de aceeași parte a planului α . Să se găsească în planul α un punct M , astfel încât suma $AM + MB$ să fie minimă.
10.  **Lucrați în perechi!** Punctele A și B sunt situate de părți diferite ale planului α , la distanțe diferite de planul α . Să se afle în planul α un punct M , astfel încât valoarea absolută a diferenței $AM - MB$ să fie maximă.
11.  **Investigați!** Prin dreapta d sunt duse toate planele posibile. Se consideră un punct A ce nu aparține dreptei d și mulțimea tuturor simetricilor punctului A față de aceste plane. Ce reprezintă această mulțime?
12. Să se demonstreze: compunerea a trei simetrii în raport cu trei plane reciproc perpendiculare este o simetrie centrală.
13.  **Investigați!** Să se dea exemple de aplicații ale simetriei față de un plan în diverse domenii.



§5 Translația

Două semidrepte cu aceeași dreaptă suport se numesc **semidrepte la fel orientate** (sau **coorientate**), dacă intersecția lor este o semidreaptă, respectiv **semidrepte opus orientate**, dacă intersecția lor nu este o semidreaptă.

Semidreptele $[AC$ și $[BC$ din figura 10.10 sunt la fel orientate, iar semidreptele $[BA$ și $[AC$ – opus orientate.

Se notează: $[AC \uparrow\uparrow [BC$, $[BA \uparrow\downarrow [AC$.

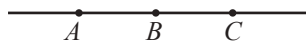
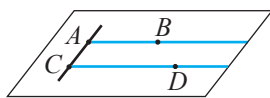


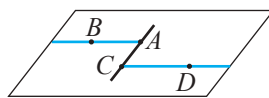
Fig. 10.10

Dacă dreptele suport a două semidrepte sunt drepte paralele distincte, atunci ele aparțin unui plan. Dreapta ce trece prin originile acestor semidrepte împarte planul în două semiplane. Dacă aceste semidrepte sunt situate în același semiplan, atunci ele se numesc **semidrepte la fel orientate** (fig. 10.11 a)), iar dacă sunt situate în semiplane diferite – **semidrepte opus orientate** (fig. 10.11 b)).



$[AB \uparrow\uparrow [CD$

a)



$[AB \uparrow\downarrow [CD$

b)

Fig. 10.11

Evident, două semidrepte la fel orientate cu a treia sunt de asemenea la fel orientate.

Definiție. Se numește **translație a spațiului determinată de perechea ordonată de puncte distincte** (A, A') transformarea spațiului care aplică fiecare punct M al spațiului pe punctul M' , astfel încât $[MM' \uparrow \uparrow [AA'$ și $MM' = AA'$ (fig. 10.12).

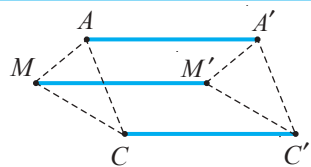


Fig. 10.12

Pentru translația determinată de perechea (A, A') se folosește notația $t_{AA'}$. Deci, $M' = t_{AA'}(M)$, $C' = t_{AA'}(C)$ etc.

Evident, dacă $t_{AA'}(M) = M'$, atunci $t_{MM'}(A) = A'$ și, în acest caz, $t_{AA'} = t_{MM'}$. Aceasta înseamnă că translația poate fi determinată de orice pereche de puncte, unul dintre care este imaginea celuilalt la această translație.

Transformarea identică a spațiului este considerată drept o translație determinată de orice pereche de puncte ce coincid: $t_{AA}(M) = t_{BB}(M) = M$, $\forall M$ și $\forall A, B$.

Dacă $M' = t_{AA'}(M)$ și $M \notin AA'$, atunci patrulaterul $AA'MM'$ este paralelogram.

Problemă rezolvată

☞ Două sate, A și B , sunt despărțite de un râu ale cărui maluri au forma a două drepte paralele. Unde trebuie să fie construit podul peste râu, astfel încât lungimea drumului dintre aceste sate să fie minimă (podul se construiește perpendicular pe maluri)?

Rezolvare:

Fie vectorul $\vec{a}$ perpendicular pe malurile râului și modulul lui este egal cu distanța dintre maluri (fig. 10.13). Dacă $B_1 = t_{\vec{a}}(B)$, atunci punctul M , din care se va construi podul, este situat pe malul pe care se află satul A și pe segmentul AB_1 . Pentru orice alt punct $M_1 \neq M$, $AM_1 + M_1B_1 > AM + MB_1 = AB_1 = AM + NB$.

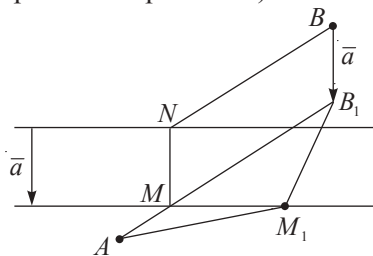


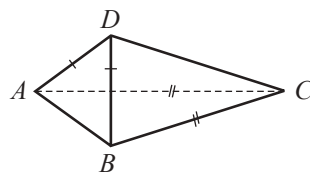
Fig. 10.13

Probleme propuse

Profilul real

- A₁** 1. Să se construiască imaginea paralelogramului $ABCD$ la translația t_{AM} , dacă punctul M coincide cu:
 - a) vârful B ; b) vârful C ; c) vârful D ; d) intersecția diagonalelor.
2. Să se construiască imaginea cubului $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ la translația t_{AM} , dacă punctul M coincide cu:
 - a) vârful B ; b) vârful B_1 ; c) vârful C_1 ; d) mijlocul muchiei AB ; e) centrul O al cubului.
3. Trei drepte paralele distincte intersectează două plane paralele distincte în vârfurile triunghiurilor ABC și respectiv $A_1 B_1 C_1$. Să se arate că aceste triunghiuri sunt congruente.

4. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare, astfel încât triunghiurile ABD și ABC sunt isoscele cu aceeași bază AB . Să se construiască imaginea figurii $ABCD$ la translația t_{AC} .



- B₁** 5.  **Investigați!** Să se decidă dacă există puncte, drepte și plane invariante la o translație diferită de cea identică.
6. Să se determine translația inversă pentru t_{AB} .
7. Să se demonstreze că:
- translația este o izometrie a spațiului;
 - translația aplică orice dreaptă pe o dreaptă paralelă cu ea, orice semidreaptă pe o semidreaptă coorientată, orice plan pe un plan paralel cu el;
 - compunerea a două translații este o translație.
8.  **Lucrați în perechi!** Există oare o translație care aplică unul dintre cele două plane date pe celălalt, dacă aceste plane: a) se intersectează; b) sunt paralele?
9. Să se arate că dacă laturile unui unghi sunt coorientate cu laturile unui alt unghi, atunci aceste unghiuri sunt congruente.
- C₁** 10. Să se arate că $S_B \circ S_A = t_{AA_1}$, unde $A_1 = S_B(A)$.
11. Să se demonstreze: compunerea a două simetrii față de două plane paralele este o translație în direcție perpendiculară pe aceste plane de la primul plan spre al doilea la distanța egală cu dublul distanței dintre aceste plane.
12. Să se demonstreze că orice translație este compoziția a două simetrii față de plane. Cum se construiesc astfel de plane?
13. Să se demonstreze: compoziția a două simetrii axiale cu axe paralele este o translație. Cum se determină această translație?
14.  **Investigați!** Să se aducă exemple de aplicații ale translației în diverse domenii.

§6 Transformarea de asemănare. Omotetia

Definiție. Fie k un număr real pozitiv. Se numește **transformare de asemănare de coeficient k** (sau **asemănare de coeficient k**) a spațiului aplicația spațiului în el însuși care pentru orice două puncte A, B și imaginile lor respective A', B' satisface condiția $A'B' = kAB$.



Observăm că orice izometrie este o asemănare de coeficient $k = 1$.

Din egalitatea $A'B' = kAB$ rezultă că dacă $A \neq B$, atunci $A' \neq B'$, adică asemănarea spațiului este o aplicație bijectivă a spațiului.

Teoremă. 1) Compunerea a două asemănări de coeficienți k_1 și k_2 este o asemănare de coeficient $k_1 k_2$.

2) Transformarea inversă asemănării de coeficient k este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$.

Demonstrație

1) Admitem că punctele arbitrare A, B se aplică, prin asemănarea de coeficient k_1 , pe punctele A' și respectiv B' , iar acestea, la rândul lor, prin asemănarea de coeficient k_2 , se aplică pe A'' , respectiv B'' . Atunci $A'B' = k_1 AB$ și $A''B'' = k_2 A'B'$. De aici obținem $A''B'' = k_1 \cdot k_2 AB$, adică transformarea care aplică punctele A, B respectiv pe A'', B'' este o asemănare de coeficient $k_1 k_2$.

2) La asemănarea de coeficient k , pentru punctele arbitrare A și B ale spațiului și pentru imaginile respective A' și B' are loc egalitatea $A'B' = kAB$. De aici obținem că $AB = \frac{1}{k} A'B'$, adică transformarea care aplică punctele A', B' pe punctele A și respectiv B este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$. ►

Două figuri se numesc **asemenae** dacă există o transformare de asemănare a spațiului care aplică una dintre aceste figuri pe cealaltă. Congruența figurilor este un caz particular al asemănării ($k = 1$).

Definiție. Fie O un punct al spațiului și k un număr real nenul. Se numește **omotetie de centru O și de coeficient k** aplicația spațiului în el însuși care satisface condițiile:

1. Punctul O se aplică pe el însuși.
2. Dacă $M \neq O$ și M' este imaginea lui M , atunci punctele O, M și M' sunt coliniare. Punctul O este exterior segmentului MM' pentru $k > 0$ și interior acestui segment pentru $k < 0$.
3. Pentru orice punct M al spațiului și imaginea sa M' are loc egalitatea $OM' = |k| OM$ (fig. 10.14).

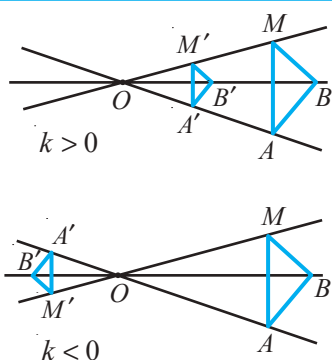


Fig. 10.14

Două figuri se numesc **figuri omotetice** dacă există o omotetie a spațiului care aplică una dintre aceste figuri pe cealaltă.

Omotetia este un caz particular al asemănării.

Problemă rezolvată

❖ Fie cubul $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (fig. 10.15). Să se construiască o secțiune a cubului cu un plan care este un hexagon regulat.

Rezolvare:

Planul determinat de punctele A_1, D și B taie trei fețe ale cubului după diagonalele $A_1 D$, DB și respectiv BA_1 . Triunghiul $A_1 DB$ este echilateral. Considerăm omotetia de centru A și coeficient $k = \frac{3}{2}$. La această omotetie, imaginea planului $A_1 DB$ este planul $A_2 D_2 B_2$, care taie cubul după hexagonul regulat $MNPQRS$. Punctele M, N, P, Q, R, S sunt respectiv mijloacele muchiilor $DC, CB, BB_1, A_1 B_1, A_1 D_1, D_1 D$.

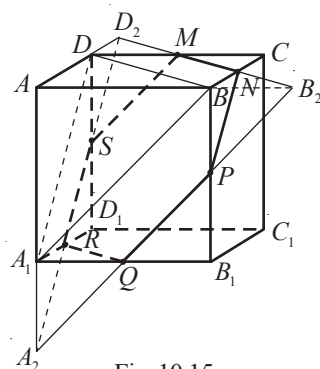
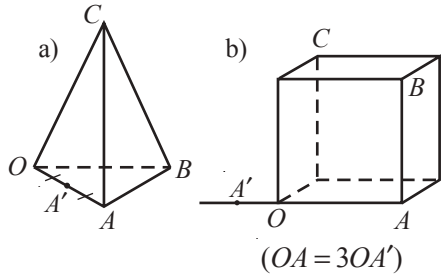


Fig. 10.15

Probleme propuse

Profilul real

- A₁** 1.  **Investigați!** Să se dea exemple de asemănare din diverse domenii.
2. Să se decidă dacă o sferă este asemenea cu un cub.
3. Sunt oare asemenea un cub și fotografia sa?
4.  **Investigați!** Câte puncte invariante are o omotetie de coeficient $k \neq 1$? Dar drepte invariante?
- B₁** 5. Lungimea muchiei unui cub este de trei ori mai mare decât lungimea muchiei altui cub. Pentru vopsirea fețelor cubului mai mic s-a folosit o cutie de vopsea. Câte cutii de vopsea sunt necesare pentru a vopsi cubul mai mare?
6. La omotetia de centru O , punctul A' este imaginea punctului A . Să se găsească imaginile punctelor B și C (cercați cazurile a) și b) din figura alăturată).
7.  **Lucrați în perechi!** Trei drepte care trec printr-un punct O intersectează planele paralele α și β în punctele A, B, C și respectiv A_1, B_1, C_1 . Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt omotetice.
- C₁** 8. Să se demonstreze că, în urma transformării de asemănare, intersecția și reuniunea a două figuri se aplică respectiv pe intersecția și reuniunea imaginilor lor.
9.  **Investigați!** Considerăm o transformare de asemănare. Ce figură reprezintă imaginea:
- | | | |
|----------------|--------------|----------------------|
| a) cercului; | b) discului; | c) paralelogramului; |
| d) pătratului; | e) cubului; | f) sferei? |



§7 Rotația în jurul unei drepte (rotația axială)

Definiție. Se numește **rotație de axă l și unghi de măsură φ** (sau **rotație în jurul dreptei l cu un unghi φ**) aplicația spațiului în el însuși la care fiecare punct al dreptei l se aplică pe el însuși, iar fiecare punct A ce nu aparține dreptei l se aplică pe punctul A' , astfel încât A și A' aparțin unui plan α perpendicular pe l , $A_0A = A_0A'$ și $m(\angle AA_0A') = \varphi$, unde $\{A_0\} = \alpha \cap l$.

Se notează: R_l^φ .

Se consideră că direcția rotației (în planul α) de la punctul A la punctul A' este aceeași pentru toate punctele A dacă privim într-un sens al dreptei l (fig. 10.16).

Dreapta l se numește **axă de rotație**, iar unghiul φ – **unghi de rotație**.

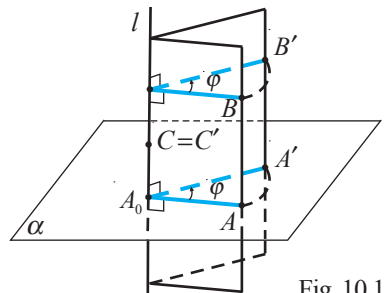


Fig. 10.16

Dacă $R_l^\varphi(F) = F$, atunci dreapta l este o axă de rotație a figurii F . Se poate arăta că rotația axială este o izometrie.

Definiție. O figură se numește **figură de rotație** dacă există o dreaptă, astfel încât orice rotație în jurul acestei drepte aplică figura pe ea însăși. O astfel de dreaptă se numește **axă a figurii**.

De exemplu, cercul, discul, sfera, cilindrul, conul sunt figuri de rotație.

Problemă rezolvată

☞ Să se determine câte axe de rotație are cubul.

Rezolvare:

Fie cubul $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 10.17).

Dacă M este centrul feței $ABCD$ și N – centrul feței $A_1B_1C_1D_1$, atunci $R_{MN}^{90^\circ}(K) = R_{MN}^{180^\circ}(K) = R_{MN}^{270^\circ}(K) = R_{MN}^{360^\circ}(K) = K$. Deci, MN este axă de rotație a cubului. Cubul mai are două axe de rotație de acest tip.

Dreapta AC_1 este axă de rotație a cubului, unghiurile de rotație fiind de 120° , 240° și 360° .

Astfel de axe mai sunt DB_1 , CA_1 , DD_1 .

Cubul mai are șase axe de rotație cu unghiurile de 180° și 360° . Acestea sunt drepte determinate de mijloacele muchiilor opuse ale cubului.

Așadar, cubul are 13 axe de rotație.

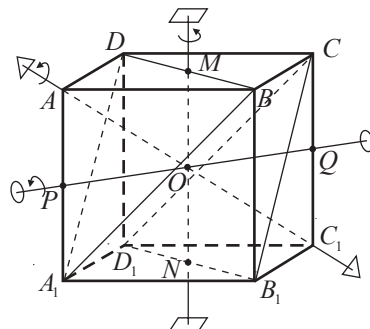


Fig. 10.17

Probleme propuse

Profilul real

- A₁** 1. **Lucrați în perechi!** Câte axe de rotație poate avea:
- a) o sferă;
 - b) o sferă fără un punct;
 - c) o sferă fără două puncte;
 - d) o sferă fără trei puncte.
- B₁** 2. Să se demonstreze că rotația în jurul unei axe este o izometrie.
3. Să se arate că simetria axială este o rotație în jurul unei axe.
4. Să se arate că orice dreaptă a perpendiculară pe axa de rotație se aplică la această rotație pe dreapta a' situată cu dreapta a în același plan și că unghiul format de a și a' este egal cu unghiul de rotație.
- C₁** 5. Să se arate că dacă o izometrie are cel puțin două puncte invariante distincte A și B , dar nu are puncte invariante ce nu aparțin dreptei AB , atunci această izometrie este o rotație de axă AB .
6. **Investigați!** Fie A și B două puncte distincte. Să se indice o rotație axială care aplică punctul A pe punctul B . *Ce figură formează axele tuturor rotațiilor de acest fel?
7. Fie dreapta l și punctele distincte A și B , astfel încât dreptele l și AB sunt necoplanare. Să se determine pe dreapta l un punct M , astfel încât $AM + MB$ să fie minimă.

Probleme recapitulative

Profilul real

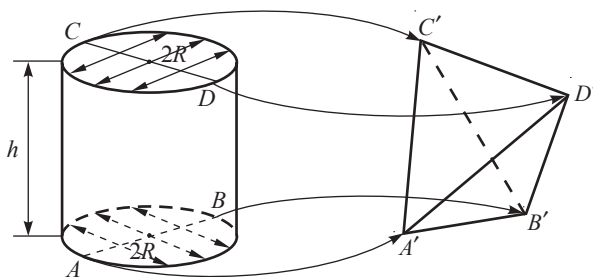
- A₁** 1. Fie două drepte d_1, d_2 și două puncte A, C . Să se determine punctele B, D ($B \in d_1, D \in d_2$), astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram. Discuții.
2. Se dau dreapta d , cercul $\mathcal{C}$ și punctele A, C . Să se determine punctele B și D ($B \in d, D \in \mathcal{C}$), astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram. Discuții.

B₁ 3. *Lucrare practică. Fabricarea ambalajului*

Ambalajul comercial de formă tetraedrică pentru unele produse lactate este fabricat prin deformarea (transformarea) suprafeței laterale a unui cilindru din carton. Realizați practic următoarele transformări:

Se turtește partea inferioară a cilindrului și se încheie după diametrul AB . Astfel se obține muchia $A'B'$ a tetraedrului. În același mod se turtește partea superioară și se încheie după diametrul CD , perpendicular pe diametrul AB . Astfel se obține muchia $C'D'$ a tetraedrului și însuși tetraedrul $A'B'C'D'$.

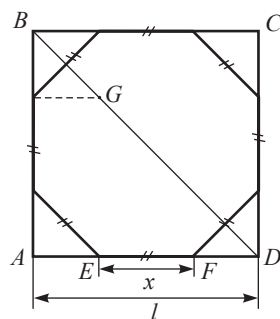
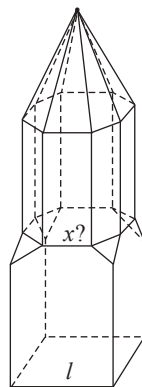
Fie $AB = CD = 2R$, înălțimea cilindrului este h .



- a) Să se exprime înălțimea h a cilindrului în funcție de R , astfel încât tetraedrul $A'B'C'D'$ să fie tetraedru regulat. (Atenție! $A'B' = C'D' = \pi R$)
- b) Considerând tetraedrul $A'B'C'D'$ regulat, să se determine raza R a bazei cilindrului și muchia tetraedrului, astfel încât capacitatea lui să fie de 1 litru. Să se exprime răspunsul în centimetri cu aproximație la zecimi.

- C₁** 4. În unele biserici românești, clopotnița este construită pe un fundament de forma unui pătrat și se termină printr-un acoperiș de forma unei piramide regulate octogonale (a se vedea figura alăturată). Știind că latura pătratului este l :

- a) să se calculeze lungimea laturii x a octogonului regulat;
- b) să se ofere o construcție geometrică a laturii octogonului.



5. Pe latura AB a triunghiului ascuțitunghic ABC este dat un punct fix P , iar pe laturile AC și BC – punctele mobile X și respectiv Y . Să se determine punctele X_1 și Y_1 , astfel încât perimetrul triunghiului PX_1Y_1 să fie minim.

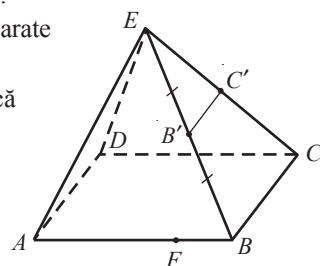
6. Pe o masă de biliard sunt două bile: una albă A și alta neagră N . Să se determine punctele de impact cu bordurile, astfel încât după impact bila albă să lovească bila neagră.
7. Să se afle vârful C al triunghiului ABC , dacă se dau vârfurile lui A, B și dreapta suport d a bisectoarei unghiului C .



8. Fie două drepte concurente d_1 și d_2 și un vector $\vec{a}$, care este paralel cu planul determinat de aceste drepte. Să se afle un punct $M_1 \in d_1$ și un punct $M_2 \in d_2$, astfel încât $\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{a}$.
9. Fie dreptele concurente d_1, d_2 și două puncte distincte A, B ce nu aparțin acestor drepte. Să se construiască paralelogramul ABB_1A_1 , astfel încât $A_1 \in d_1, B_1 \in d_2$.

10. Fie piramida $EABCD$ baza căreia este paralelogramul $ABCD$.

- a) Notând prin B' și C' mijloacele muchiilor EB și EC , să se arate că dreptele $B'C'$ și BC sunt paralele.
- b) Fie F un punct de pe muchia AB , $F \neq A$. Să se arate că dreapta $B'C'$ intersectează planul EDF într-un punct G . Să se construiască punctul G .
- c) În planul EBC notăm prin B'' simetricul punctului B' față de punctul C' . Să se arate că dreptele AB' și DB'' sunt paralele.



11.  **Lucrați în grup!** Proiect *Aplicații ale transformărilor geometrice în arte.*

Test sumativ

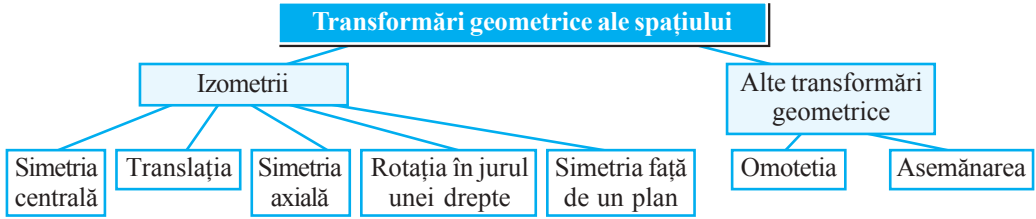
Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Profilul real

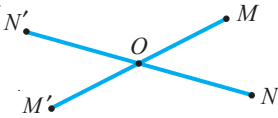
- Indicați planele de simetrie ale figurii formate din reuniunea a două plane secante. ③
- Indicați axele de simetrie ale figurii formate din reuniunea a două drepte paralele. ③
- Arătați că reuniunea a două drepte necoplanare este o figură care are trei axe de simetrie. ⑤
- Arătați că planul determinat de secțiunea diagonală a cubului este un plan de simetrie al acestuia. ④
- Determinați care dintre următoarele figuri sunt asemenea: ⑤
 - două cuburi;
 - două tetraedre regulate;
 - două sfere;
 - doi cilindri;
 - două paralelipede.
- În planul înzestrat cu sistemul cartezian rectangular de coordonate xOy sunt reprezentate punctele $A(2, 1), B(-1, 4), C(-3, -1), D(0, -4)$. Determinați coordonatele simetricilor acestor puncte față de: ⑤
 - originea O ;
 - punctul A ;
 - axele de coordonate;
 - dreapta AB .

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	25–24	23–22	21–19	18–15	14–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

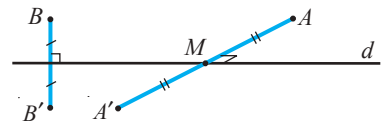


Simetria centrală: S_O



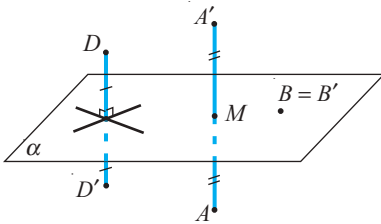
1. $S_O(O) = O$;
2. $\forall M \neq O, S_O(M) = M'$, astfel încât O este mijlocul segmentului MM' .

Simetria axială: S_d



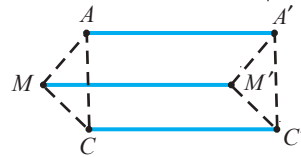
1. $\forall M \in d, S_d(M) = M$;
2. $\forall A \notin d, S_d(A) = A'$, astfel încât $AA' \perp d$, și dacă $AA' \cap d = \{M\}$, atunci M este mijlocul lui $[MM']$.

Simetria față de un plan: S_α



1. $\forall B \in \alpha, S_\alpha(B) = B$;
2. $\forall A \notin \alpha, S_\alpha(A) = A'$, astfel încât $AA' \perp \alpha$ și punctul $\{M\} = AA' \cap \alpha$ este mijlocul segmentului AA' .

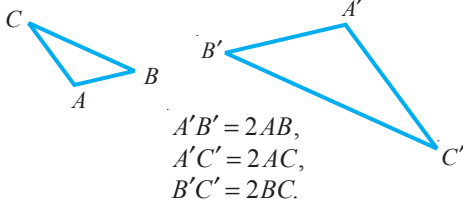
Translația determinată de perechea ordonată (A, A') de puncte distincte: $t_{AA'}$



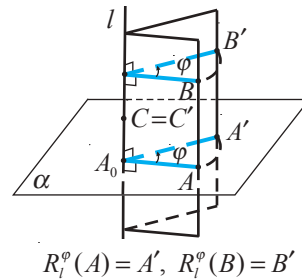
- $\forall M \notin (AA'), t_{AA'}(M) = M'$, astfel încât $AA'M'M$ este paralelogram.
 $t_{AA'}(C) = C'$

Asemănarea de coeficient $k, k > 0$

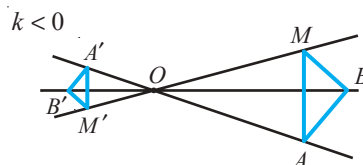
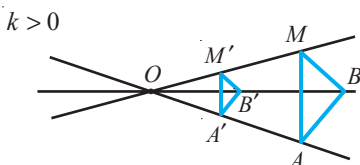
Pentru orice puncte A, B ale spațiului și imaginile lor A', B' are loc egalitatea $A'B' = k \cdot AB$.



Rotația în jurul dreptei l cu un unghi φ : R_l^φ



Omotetia cu centrul O și coeficientul k



Răspunsuri și indicații

Modulul 1

§ 1. Profilurile umanist, arte, sport. A: 2. De exemplu, $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n}$.

3. a) $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{9}{8}, \frac{11}{9}$; b) crescător. **B:** 5. De exemplu, a) $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^{2n-1} \cdot n$;

b) $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = n + 2$. 6. a) Crescător, mărginit; b) crescător, mărginit; c) descrescător, mărginit.

C: 7. a) $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 2n - 1$; b) $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{3^n}$. 8. a) Da; b) da; c) nu.

Profilul real. A: 3. $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \frac{9}{12}, \frac{9}{15}$. 4. a) $\frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \left(\frac{11}{10}\right)^3, \left(\frac{11}{10}\right)^4, \left(\frac{11}{10}\right)^5$; b) crescător, mărginit

inferior. 6. a) $\sup X = +\infty$, $\inf X = \frac{1}{2}$; b) $\inf X = -\infty$, $\sup X = -\frac{1}{2}$. **B:** 7. a) $x_n = 1 - 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) strict crescător, mărginit superior. 8. a) $x_n = 5n - 15$, $n \in \mathbb{N}^*$, crescător, mărginit inferior; b)

$x_n = 4 \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, crescător, mărginit inferior. **C:** 10. a) $x_n = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$; b) strict

crescător; c) $1 \leq x_n < \frac{3}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. 11. a) $\inf A = -\infty$, $\sup A = +\infty$; b) $\inf B = -\infty$, $\sup B = \sqrt[3]{7}$.

§ 2. Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. a) 7, 9, 11, 13; b) -3, 2, 7, 12; c) 1,3; 1,6; 1,9; 2,2;

d) $\frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{4}{35}, \frac{1}{35}$. 2. a) $a_1 = 23$; b) $a_1 = 597$. 3. a) -10, -5, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B: 5. 23 dm. 6. 1900 de locuri. 7. 1600 m. **C:** 8. 4 154,28 de lei. 9. 5 760 de lei. 10. 1024 de bacterii.

Profilul real. A: 1. 484. 2. a) $a_n = \frac{n-13}{3}$, $S_{14} = -\frac{77}{3}$; b) $a_n = \frac{5n+16}{35}$, $S_{25} = \frac{405}{7}$. 3. a) $b_n = 9 \cdot 2^{n-1}$;

b) $b_n = 10 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$. 4. $S_9 = 70$. **B:** 7. a) $b_1 = \frac{768}{125}$; $q = -\frac{5}{4}$; b) $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = -\frac{1}{2}$. 8. Indicație. Nume-

rele x, y, z rezultă din sistemul $xz = y^2$, $x + z = 2(y + a)$, $x(z + b) = (y + a)^2$. 9. $\frac{47 \pm \sqrt{1993}}{4}$.

10. a) $b_1 = 0,3$; b) $b_1 = -\frac{1}{21}$. **C:** 11. $S = \{55\}$. 12. Mai mică decât 2. 13. De exemplu,

$180 = 12 + 24 + 48 + 96$; $180 = \frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{81}{2} + \frac{243}{2}$.

§ 3. Profilul real. A: 1. De exemplu $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{2^n}$ este convergent, iar $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = (-1)^{n-1}$ este

divergent. **B:** 5. a) 0; b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{3}$; e) 0; f) 0; g) 0; h) 2. **C:** 6. a) e^{-4} ; b) -1; c) $\frac{1}{2}$; d) e^{-2} .

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. a) $\frac{1}{3}, 1, \frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{13}{7}$; b) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$;

c) $-6, \frac{15}{2}, -\frac{20}{3}, \frac{29}{4}, -\frac{34}{5}$. 2. a) $x_n = \frac{n}{n+1}$; b) $x_n = 2n$; c) $x_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}$; d) $x_n = \frac{1}{3^n}$.

3. De exemplu, a) 22, 24, 26, 28, 30; b) 1, -1, 1, -1, ...; c) $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$. 4. Nu este monoton.

B: 5. a) $a_n = -4n + 2$; b) $a_n = 2n - 1$; c) $a_n = 5n - 15$; d) $a_n = 7n - 4$. 6. a) -24 550; b) 4 850.

7. a) $b_n = 2 \cdot 6^{n-1}$; b) $b_n = -10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; c) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. 8. a) $x_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, $q = 3$; b) $x_n = 2n + 2$, $r = 2$;

c) $x_n = -4 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $q = \frac{1}{3}$; d) $x_n = 5n - 6$, $r = 5$. 9. a) $n = 10$, $S_n = 140$; b) $a_1 = 4$, $n = 8$ sau

$a_1 = -2$, $n = 11$. **C:** 10. a) $q = 2$, $S_9 = 2\,555$; b) $b_1 = 3$, $S_8 = 765$. 11. 5 ore. 12. 313,6 m. 13. $-1 \pm \sqrt{6}$.

Profilul real. B₁: 4. a) 0; b) 0; c) 0; d) $\frac{1}{3}$; e) 0; f) $+\infty$. **C₁:** 5. 24 de unități de lungime.

6. 243 l. 7. 1224. 8. $S_n = n[x^2 + (3-n)ax + a^2]$. 9. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $-\frac{2}{3}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{1}{2}$; g) e^{-1} ; h) e; i) 0.

Test sumativ

Profilurile umanist, arte, sport. 1. a) $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{7}{5}$; b) 0, $\frac{2}{3}$, 0. 2. Strict descrescător.

3. $a_1 = 2$, $r = 3$ sau $a_1 = 14$, $r = -3$. 4. $b_1 = 1$, $q = -3$. 5. La etajul 6.

Profilul real. 2. $a_1 = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{4}$. 3. $b_1 = \frac{30}{7}$, $q = \frac{3}{4}$ sau $b_1 = -\frac{30}{7}$, $q = -\frac{3}{4}$. 4. 9 inele.

Modulul 2

§1. Profilul real. A₁: 1. *Indicație.* Arătați că $(2-r, 2+r) \cap E \neq \emptyset$, $\forall r > 0$. 2. *Indicație.*

Stabiliți că $\exists \varepsilon > 0$ a.î. $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \cap E \setminus \{x_1\} = \emptyset$. 5. a) 2; b) $\frac{3}{7}$; c) $-\frac{1}{2}$. **B₁:** 6. a) -2, 2;

b) 2, 4; c) $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -1, 1. 7. a) $x_n = 4 + \frac{1}{n}$; b) $x'_n = -1 + \frac{2}{2n+1}$, $x''_n = \frac{n}{n+1}$. 9. *Indicație.* Studiați

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ pentru șirurile $(x'_n)_{n \geq 1}$, $x'_n \rightarrow x_0$, și $(x''_n)_{n \geq 1}$, $x''_n \rightarrow x_0$, care se determină din

condiția ca funcția sinus sau funcția cosinus să ia, de exemplu, una dintre valorile 0, 1 sau -1, și aplicați observația 3. 10. a) $l_s(2) = 5$, $l_d(2) = 6$; b) $l_s(-1) = l_d(-1) = 1$; $l_s(1) = -\infty$, $l_d(1) = +\infty$.

11. a) $l(0) = 1$, $\nexists l(1)$; b) $l(0) = -2$, $l(2) = -4$. **C₁:** 12. a) $l_s(k\pi) = -1$, $l_d(k\pi) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow k\pi} f(x)$;

b) $l_s(k) = k - 1$, $l_d(k) = k \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow k} f(x)$. 13. a) $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; b) $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $x_0 \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

14. a) $a = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$; $a = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$; b) $a = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$; $a = -3$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. 15. $a = 1$.

§2. Profilul real. A₁: 1. a) -1; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) ∞ . 2. a) 4; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$;

e) 55; f) -3. 3. a) $\frac{1}{2}$; b) $e(e-1)^2$; c) $\frac{1}{2}e$. 4. a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $-\infty$. 5. a) 1; b) 2. **B₁:** 6. a) $-\frac{2}{5}$;

b) 0; c) $+\infty$. 7. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$. 8. a) $+\infty$; b) 2; c) $-\frac{1}{3}$. 9. a) $(-1)^n$; b) $3 \cdot (-1)^{n+1}$.

C₁: 11. a) $f(\pm 0) = 0$, $f(1+0) = f(-1-0) = +\infty$, $f(1-0) = f(-1+0) = -\infty$; b) $f(1+0) = f(-1-0) = 0$, $f(1-0) = f(-1+0) = +\infty$; c) $f(-1-0) = 1$, $f(-1+0) = 0$. 12. *Indicație.* A se vedea indicația la

exercițiul 7 din §1. a) A; b) F; c) A. 13. $m = -1$, $m = 2$. 14. $m \in [-1, 3]$. 15. a) 1; b) $-\infty$; c) 0;

d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) $-\infty$; h) $-\infty$.

§3. Profilul real. A₁: 1. a) 3; b) -3; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) -2; f) $\frac{3}{4}$. 2. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{5}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) 2;

e) 3; f) $-\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}$; h) 3; i) $\frac{1}{2}$. **B₁:** 3. a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $e^{\frac{1}{2}}$; d) e^2 ; e) e^3 ; f) e^{-1} . 4. a) 2; b) $\frac{9}{2}$; c) $-\frac{2}{3}$;

d) $-\frac{5}{6}$; e) $-\frac{5}{2}$; f) $-\frac{9}{4}$. **C₁:** 5. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) -1; d) $-\frac{1}{3}$; e) $\frac{5}{6}$; f) $-\frac{5}{12}$. 6. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$;

d) $+\infty$. 7. a) $m = -1$, $n = 4$; b) $n = 2 + \pi$, $m = -2$.

§ 4. Profilul real. A₁: 1. a) $\frac{12}{25}$; b) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$; c) $\frac{1}{3}$; d) -3 ; e) 1 ; f) 0 ; g) $2 - \log_2 3$; h) $\frac{3}{5}$; i) $\frac{1}{2}$.
2. a) $-\infty$; b) $\frac{5}{4}$; c) $\frac{1}{5}$; d) 3 ; e) $-\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{3}$; g) -1 ; h) -3 ; i) 1 . **B₁:** 3. a) $-\frac{7}{2}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{3}{2} \ln 2$; d) 0 ;
e) e^{-2} ; f) e^3 ; g) $\sqrt{6}$; h) e^5 ; i) $-\frac{1}{4}$. 4. a) $\sqrt[32]{e}$; b) $e^{10} \cdot \sqrt{e}$; c) $\sqrt[3]{e}$; d) $\sqrt[4]{e^3}$; e) $\sqrt[3]{e^2}$; f) C_{n+1}^2 ; g) $2^{n(n+1)}$;
h) $\frac{n(n-1)}{2}$. **C₁:** 5. $a=1$, $b=-1$. 6. $+\infty$, dacă $a+2b>0$; $-\infty$, dacă $a+2b<0$; $-\frac{3b}{4}$, dacă $a+2b=0$. 7. $a=2$, $b=5$, $f(-1 \pm 0) = \pm \infty$. 8. $a=-3$, $b=-1$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real. A₁: 1. a) $\frac{2}{5}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{7}{12}$; d) -3 ; e) -14 ; f) $-\infty$; g) $\frac{5}{28}$; h) -1 ; i) $\frac{1}{12}$. 2. a) $-\frac{3}{4}$;
b) $-\frac{3}{4}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{2}{3}$. 3. a) $\frac{1}{2}$; b) 1 ; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\log_{72} \frac{8}{9}$; f) $\frac{1}{3}$. **B₁:** 4. a) 2 ; b) $\frac{2}{5}$;
c) 3 ; d) 4 ; e) e^2 ; f) e^{-1} ; g) $e^{-\frac{3}{2}}$; h) $\frac{3}{5}$. 5. a) $-\infty$; b) 0 ; c) $\frac{1}{2}$; d) $+\infty$; e) $+\infty$; f) 0 .

C₁: 6. a) $a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$; b) $a \in \{\pm 1, \pm 4\}$; c) $a=5$; d) $a=0$. 7. a) $a=1$, $b=-2$; b) $a=-2$, $b=3$;
c) $a=2$, $b=4$. 8. a) $x=-1$, $x=3$; b) 600 m; c) 400 m; d) $5,7^\circ$; e) 200 m. 9. a) 5200 m; b) 621 km 480 m;
c) 10 m.

Test sumativ

Profilul real. 1. a) -1 ; b) $\frac{1}{2}$. 2. a) $l_s(0) = l_d(0) = 2$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$. 3. a) $l_1 = 2$, $l_3 = -3$;
b) $l = \frac{3}{2}$; c) $l_2 = 1\frac{1}{4}$; d) $S = \{5, 8\}$. 4. C.

Modulul 3

§ 1. Profilul real. A₁: 2. a), b), c) Continuă ca funcție elementară. 3. a), b) Continuă;
c) discontinuă în $x_0 = 0$; d) discontinuă în $x_0 = 0$. 4. a) Continuă în punctele $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;
b) continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_0 = 0$ – punct de discontinuitate de speța a doua. **B₁:** 5. a) Indicație.

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq |x-x_0| \Rightarrow \forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta > 0 \ (\delta < \varepsilon),$$

astfel încât $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < \delta$; b), c) și d) similar cu a).

$$6. a) f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ |x-1|, & \text{dacă } x > 0; \end{cases} \quad b) f \text{ este continuă pe } \mathbb{R}. \quad 7. a=0, a=-\sqrt{2}, a=\sqrt{2}.$$

$$8. a) x_0=1; f(1+0)-f(1-0)=-e; b) x_0=-1, x_1=0; f(-1+0)-f(-1-0)=2, f(+0)-f(-0)=1.$$

C₁: 9. a), b) Continuă pe $[a, b]$; c) continuă pe intervalele $[a, x_0]$ și $(x_0, b]$. 10. a) Continuă pe
intervalele $[-3, -2]$, $[-2, -1]$, $(-1, 2]$, $(2, 4]$ și $(4, 5]$; b) $f(-1) \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$, $f(2) \cdot f(4) = 1 \cdot 3 = 3$,
 $f(0) \cdot f(5) = 1 \cdot 2 = 2$. 11. a) Continuă; b) discontinuă în punctele $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

$$12. a) a+be=2, a, b \in \mathbb{R}; b) a=-1. \quad 13. a) a=3; b) S=\{e\}.$$

§ 2. Profilul real. A₁: 2. Indicație. $\lim_{x \rightarrow x_0} f_{\pm}(x) = f_{\pm}(x_0)$, $\forall x_0 \in I$. 4. a) Indicație. Fie $\alpha = -1$,
 $\beta = 0$. Atunci $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ și funcția f nu ia pe $(-1, 0)$ valori din intervalul $(0, 1)$;
b) avem $f(0,5) = -0,5$ și $f(1) = 0$, iar funcția f nu ia pe $(0,5; 1)$ valori din intervalul $(-0,5; 0)$;

c) funcția f ia numai valori întregi. **5.** Teorema despre anularea funcției nu poate fi aplicată.

B₁: **8.** a) $S = (e^{-4}, 3)$; b) $S = (-\infty, -4)$; c) $S = \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, 1 \right) \cup (10^{10}, +\infty)$. **9.** a) $f(x) > 0$ pe $(-\infty, 0) \cup (a, b) \cup (c, +\infty)$ și $f(x) < 0$ pe $(0, a) \cup (b, c)$; b) $f(x) > 0$ pe $(1, +\infty)$ și $f(x) < 0$ pe $(-\infty, -4) \cup (-4, 1)$. **10.** a) $f(x) < 0$ pe $(-\infty, \ln 4)$ și $f(x) > 0$ pe $(\ln 4, +\infty)$; b) $f(x) > 0$ pe $(0, e^2)$ și $f(x) < 0$ pe $(e^2, +\infty)$; c) $f(x) < 0$ pe $(-\infty, \log_2 5)$ și $f(x) > 0$ pe $(\log_2 5, +\infty)$; d) $f(x) > 0$ pe $(-\infty, \log_3 2)$ și $f(x) < 0$ pe $(-\log_3 2, 0)$. **C₁:** **11.** Indicație. Fie (a, b) interval finit.

$\tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } a < x < b \\ \alpha, & \text{dacă } x = a \\ \beta, & \text{dacă } x = b, \end{cases}$ este o funcție continuă pe $[a, b]$, deci și mărginită:

$m \leq (\tilde{f}(x)) \leq M$, $\forall x \in [a, b] \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in (a, b)$. Dacă $(a, b) = (a, +\infty)$ ($a \neq -\infty$), atunci $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > a$, astfel încât $\beta - \varepsilon < f(x) < \beta + \varepsilon$, $\forall x \geq \Delta$. Pe intervalul (a, Δ) funcția f este mărginită: $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in (a, \Delta) \Rightarrow \min(\beta - \varepsilon, m) \leq f(x) \leq \max(\beta + \varepsilon, M)$, $\forall x \in (a, +\infty)$. Similar pentru intervalele $(-\infty, b)$ și $(-\infty, +\infty)$.

12. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-a)(b-x)}$.

14. De exemplu: a) $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -4x + 3, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 0, & \text{dacă } x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right); \end{cases}$

b) $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = x$; c) $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ -2x + 2, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$

§3. Profilul real. **A₁:** **1.** a) Nu are asimptote; b) $y = x$; c) $x = 0$, $y = 3$. **2.** De exemplu, $f: \mathbb{R} \setminus \{k\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$, $k \in \mathbb{Z}$. **B₁:** **4.** $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$. **5.** $a = -6$, $b = 4$.

C₁: **6.** a) $y = 0$ la $+\infty$ și $-\infty$, $x = \pm 1$; b) $y = x$ la $+\infty$ și $y = -x$ la $-\infty$; c) $y = 1$ la $+\infty$ și $-\infty$, $x = 0$. **7.** a) $x = 0$, $y = 0$; b) $x = \pm 2$; c) $y = 0$ la $+\infty$, $x = 0$; d) $y = x$ la $+\infty$ și $-\infty$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real. **A₁:** **2.** a) $x = 1$ – punct de discontinuitate de speța întâi; b) $x = 1$ – punct de discontinuitate de speța a doua; c) $x = -1$ – punct de discontinuitate de speța întâi; d) $x = 0$ – punct de discontinuitate de speța a doua. **B₁:** **3.** $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$. **4.** a), b), d) Mărginite; c) nemărginită. **6.** $a = -1$.

C₁: **9.** a) $S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$; b) $S = (1, 4)$; c) $S = \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (1, +\infty)$. **11.** $a = \frac{1}{4}$.

Test sumativ

Profilul real. **1.** F, teorema lui Weierstrass. **2.** 1) a) $b = 1$ și $\forall a, c, d \in \mathbb{R}$; b) $c + d = 1$ și $\forall a, b \in \mathbb{R}$; c) $b = 1$, $c + d = 1$ și $\forall a \in \mathbb{R}$. 2) Cazul a) $c + d = 1$; cazul b) $1 - b$. **4.** a) $S = (-2, 2) \setminus \{0\}$; b) $S = (0, 1) \cup (2, +\infty)$. **5.** $y = 0$, $x = -1$.

Modulul 4

§1. Profilul real. A₁: 1. a) $\Delta x = 1,5$, $\Delta f = 3,75$; c) $\Delta x = -0,5 - \sqrt{3}$, $\Delta f = 2,75$; d) $\Delta x = -4,7$, $\Delta f = 17,39$. 2. c) $f'(x) = 6x^2$; d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. 3. a) $f'(-1) = f'(0) = f'(0,5) = f'(10) = 0,5$.

4. a) $y = -x + 4$, unghi obtuz; $y = \sqrt{3}x + (3 - \sqrt{3})$, unghi ascuțit; b) $y = x + 2$, unghi ascuțit; $y = -\sqrt{3}x + (3 + \sqrt{3})$, unghi obtuz; c) $y = 0$, unghi nul; $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{9 - \sqrt{3}}{3}$, unghi ascuțit.

B₁: 5. b) f nu este derivabilă în punctele $x_0 = -2$ și $x_1 = 2$. 7. a) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$; b) f este derivabilă în $x_0 = 0$. **C₁:** 8. a) $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$; b) $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. 9. $n = 0$, $m = \frac{2}{e}$. *Indicație.* Pentru a determina parametrii m și n , puneți condițiile de continuitate și de derivabilitate ale funcției în punctul $x_0 = e$. 10. $a \in \mathbb{R}$, $b = 1$, $c = 1$.

§2. Profilul real. A₁: 1. a) f este derivabilă în x_0 și x_1 ; b) f este derivabilă în x_1 și nu este derivabilă în x_0 ; c) f este derivabilă în x_1 și nu este derivabilă în x_0 și x_2 . 3. a) $y = 3x - 2$; b) $y = -1$; c) $y = 4x + 6$. 4. a) 0° ; b) 60° . **B₁:** 6. a) f nu este derivabilă în $x_0 = -3$ și $x_1 = 3$; b) f nu este derivabilă în $x_0 = 10$. 7. a) 1) $y = x + 0,75$; 2) $y = 6x - 3$; 3) $y = -8x - 24$; b) 1) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{(4 - \pi)\sqrt{2}}{8}$; 2) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$; 3) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{3} - 6}{12}$. 8. a) 1) Funcțiile f, g, h sunt continue pe $\mathbb{R}$; 2) f este derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; g este derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; h este derivabilă pe mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. 9. $(2, -1)$. 10. $(2, 4)$. 11. $\arctg 3$. 12. $(1, -1)$; $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{13}{243}\right)$. 13. $y = 10x - 12$, $y = 12 - 2x$. **C₁:** 14. $b = 4$, $c = 1$. 15. b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

§3. Profilul real. A₁: 1. a) $f'(x) = 8x^7$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; b) $f'(x) = -7x^{-8}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$; c) $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$; d) $f'(x) = 3^x \ln 3$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; e) $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; f) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$; g) $f'(x) = -\frac{1}{x \ln 3}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$; h) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt{x^4}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$. 2. a) $\frac{1}{7 \ln 7}$; b) $\frac{10}{\ln 10}$; c) 120 ; d) $\frac{1}{14}$; e) $32 \ln 2$; f) 0 . 3. a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; b) $y = x \ln 2 + 1$; c) $y = x \log_8 \sqrt{e} + \log_8 \frac{2}{e}$; d) $y = 5x + 4$. 4. a) $f'(0) = 1$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; b) $f'(0) = 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. **B₁:** 5. a) $f'(x) = 1,5\sqrt{x}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+$; b) $f'(x) = 3,4x^2$, $D_{f'} = \mathbb{R}$. 6. a) $f'(x) = \frac{1}{7\sqrt{x^6}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$; b) $f'_d(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$; $f'_s(x) = \frac{1}{-2\sqrt{-x}}$, $x < 0$; $D_{f'} = \mathbb{R}^*$; c) $f'(x) = \frac{1}{x^2 \ln 0,4}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$; d) $f'_d(x) = 2^x \ln 2$, $x > 0$; $f'_s(x) = 2^{-x} \ln 2$, $x < 0$; $D_{f'} = \mathbb{R}$. 7. a) $f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f'_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; b) $f'_d(0) = 2$, $f'_s(0) = -2$; c) $f'_s(0) = 3$, $f'_d(0) = -2$. 8. a) $y = -42x - 63$; b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}$; c) $y = \frac{3x}{27 \ln 27} + \frac{\ln 9 - 1}{\ln 3}$; d) $y = 2,5x \ln 2,5 + 2,5(1 - \ln 2,5)$. **C₁:** 9. $m = 1$, $n = 0$. 10. a) $m = n$; b) $m = n = 1$. 11. $a \in [-2, 0] \cup [\sqrt{2}, 2]$.

§4. Profilul real. A₁: 1. a) 1) $f'(x) = 30x^5$; 2) $f''(x) = 150x^4$; 3) $f'''(x) = 600x^3$; b) 1) $f'(x) = \pi e^x$; 2) $f''(x) = \pi e^x$; 3) $f'''(x) = \pi e^x$; c) 1) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 9}$; 2) $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln 9}$;

3) $f'''(x) = \frac{2}{x^3 \ln 9}$; d) 1) $f'(x) = 3x^2 - 10x$; 2) $f''(x) = 6x - 10$; 3) $f'''(x) = 6$.

2. a) $D_f = \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$; b) $D_f = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} + 5x^4$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$;

c) $f'(x) = e^x(1+x)$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$; d) $D_f = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$;

e) $D_f = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{\log_3 x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x \ln 3}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$; f) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

g) $D_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+2)^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; h) $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; i) $f'(x) = \frac{e^x(x-4)}{(x-3)^2}$,

$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; j) $f'(x) = \frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$, $D_f = (-\infty; 0] \cup [0,5; +\infty)$, $D_{f'} = (-\infty; 0) \cup (0,5; +\infty)$;

k) $D_f = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{4}{x \ln 2}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^*$. 3. a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; b) $\log_5 0,5 + \frac{2}{\ln 5}$. 4. a) $v(t) = -t^2 + 6t + 7$;

b) 15 m/s; c) 7 s. 5. a) $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s; b) $v_1(t) = 12t + 4$, $a_1(t) = 12$; $v_2(t) = 3t^2 + 6t + 6$, $a_2(t) = 6t + 6$; c) $v_1(1) = 16$ m/s, $v_1(2) = 26$ m/s, $a_1(1) = a_1(2) = 12$ m/s²; $v_2(1) = 15$ m/s,

$v_2(2) = 30$ m/s, $a_2(1) = 12$ m/s², $a_2(2) = 18$ m/s²; d) $v_1(t) = v_2(t)$ în momentele $t_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ s și

$t_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ s, $a_1(t) = a_2(t)$ în momentul $t = 1$ s. B₁: 6. a) $f'(x) = 25x^{24} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x$;

b) $f'(x) = \cos x + \frac{1}{x \ln 0,3} - \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$; c) $f'(x) = \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3x}} + \frac{10}{x^3}$; d) $f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[6]{32x^5}} + 7e^x + \frac{3}{x^{10}}$;

e) $f'(x) = -\sqrt{5} \sin x - 7 \cos x - \frac{4}{x}$; f) $f'(x) = 5 \left(\frac{\sin x}{4\sqrt[4]{x^3}} + \sqrt[4]{x} \cos x \right)$; g) $f'(x) = 8x^2(3 \ln x + 1)$;

h) $f'(x) = 3x^{-6}(\log_3 x - 0,2 \log_3 e)$; i) $f'(x) = \frac{10x-15}{x^2-3x}$; j) $f'(x) = \frac{6\sqrt{2} \log_5^2 \operatorname{tg} x}{\sin 2x \ln 5}$;

k) $f'(x) = 3 \cdot 6^{3x} \cdot \ln 6 \cdot \sin^2 4x + 4 \cdot 6^{3x} \cdot \sin 8x$; l) $f'(x) = \frac{-6x^2 \cdot \ln x \cdot \sin(3x^2 - 1) - 2 \cdot \cos(3x^2 - 1)}{x \ln^3 x}$.

7. a) $y = \sqrt{3}x + \left(\frac{1}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \right)$; b) $y = 0$; c) $y = \sqrt{3} \cdot x + 1 - \sqrt{3}$. 8. $a \in \mathbb{R}$, $b = 2$, $c = 1$. 9. De exemplu,

a) $f(x) = 2x - \sin x + 2008$; b) $f(x) = -e^{2x} - 100$. 10. a) $S = \{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$;

b) $S = \{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 11. a) $S = (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$; b) $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, \frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \right)$.

Indicație. Rezolvați inecuația $\sin(6x - \pi) < \frac{1}{2}$. 12. a) $f''(x) = 12x - 10$; b) $f''(x) = -18 \sin 3x$;

c) $f'''(x) = 20e^{-2x}$; d) $f''(x) = -\frac{3}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$; e) $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$; f) $f''(x) = -\frac{x}{27\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^3}}$;

g) $f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$; i) $f''(x) = (\sqrt{x})^{x-1} \cdot \left[\left(\ln \sqrt{x} + \frac{x-1}{2x} \right)^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \right]$. Indicație. Aplicați de

două ori formula $(\ln x)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$. 13. $-\frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{5}{x^2+1} + 3 \operatorname{arctg} x$. 14. a) 24; b) $\frac{3}{8} \sin \frac{x}{2}$;

c) $-27\sqrt{2}e^{-3x}$; d) $-\frac{6}{(x-2)^4}$; f) $\frac{2}{x^3}$. 16. 70 m N. 17. a) 28 m/s; b) 10 m/s²; c) 24 010 kg²/s².

18. a) $\approx 10,2$ s; b) $\approx 510,204$ s; c) $\approx 10,2$ s; d) ≈ 100 m/s. C₁: 21. $x \in \left\{ 0, \frac{\pi}{6} \right\}$. 23. $m = 1$, $n = -1$.

§5. Profilul real. A₁: 1. a) $df(x) = (3x^2 + 2)dx$; b) $df(x) = \frac{dx}{(1-x)^2}$; c) $df(x) = \cos(x+1)dx$;

e) $df(x) = -2\sin 2x dx$. 2. a) $df(x) = (\log_2 x + \log_2 e)dx = \log_2(ex)dx$; b) $df(x) = 2xe^{4x}(1+2x)dx$;

c) $df(x) = \left[\operatorname{ctg}(x+5) - \frac{x}{\sin^2(x+5)} - \frac{1}{x} \right] dx$; d) $df(x) = \frac{9}{x} dx$. 3. a) $-\frac{2}{3} dx$; b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2} dx$; c) $\frac{1}{\ln 4} dx$.

B₁: 4. a) $df(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 20x^3 + \frac{7}{x^8} \right) dx$; b) $df(x) = \left(-2 \cdot e^{-x} \cdot \ln 3 - \frac{2x}{x^2-1} \right) dx$;

c) $df(x) = \left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x} - \frac{2x-1}{5\sqrt{(x^2-x)^4}} \right) dx$. 5. a) $2\frac{1}{8} dx$; b) nu există; c) $\frac{1}{3} dx$; d) $28e^4 dx$.

6. a) $\frac{2\ln(x-1)}{x-1} dx$; b) $\frac{2x}{x^2-5} dx$. 7. a) $4x^3 \sin 2x^4 dx$; b) $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx$; c) $\frac{10 \operatorname{ctg} \frac{2}{x} \ln 5}{\left(x \sin \frac{2}{x}\right)^2} dx$.

C₁: 8. a) $(x^{\sin x} (\cos x) \cdot \ln x + x^{\sin x-1} \cdot \sin x) dx$; b) $(x^{\ln x-1} \cdot \ln \sqrt{x^2}) dx$;

c) $((x-1)^{3x} \cdot 3\ln(x-1) + 3x(x-1)^{3x-1}) dx$. 9. a) 1) Funcția f nu este derivabilă în $x=1$;

2) $df(x) = -e^{-|x-1|} \cdot \frac{x-1}{|x-1|} dx$, $x \neq 1$; b) 2) $df(x) = \begin{cases} -(x+2)e^x dx, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ (x+2)e^x dx, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \\ -xe^{-x} dx, & \text{dacă } x \in (0, +\infty). \end{cases}$

§6. Profilul real. A₁: 1. a) x_0 ; b) x_0, x_2 ; c) x_2 ; d) x_2 ; e), f) în niciunul dintre punctele indicate.

2. a) 1) $S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$; sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat; b) 1) $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$; sunt verificate condi-

țiile teoremei lui Fermat. 3. a) Da; b) nu. **B₁:** 6. b) $c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 7. a) $c=1$; b) funcția f nu este derivabilă în $x_0=2$; c) $c=0$; d) $c=\frac{\pi}{2}$. 8. a) $a=7, b=-3, d=-1$; b) $c=-\frac{3}{14}$. 9. *Indicație.*

Aplicați corolarul teoremei lui Rolle. 10. *Indicație.* Studiați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot 2^x - 2 \cdot x^{10} + 2$.

12. a) $c=-0,5$; b) $c=\frac{3\sqrt{3}}{e}$; c) teorema lui Lagrange nu poate fi aplicată funcției f , deoarece ea nu este derivabilă pe $(0, 3)$; d) $c=\ln \frac{e^5-1}{5e}$. 14. $f'(x)=7$. *Indicație.* Aplicați corolarul 3 al teoremei

lui Lagrange. 16. f este derivabilă în $x_0=1$ și $f'(1)=2$. 17. a) -2 ; b) ∞ ; c) $-\frac{1}{3}$; d) 1; e) 0; f) 0; g) 1; h) 0. 18. a) 1; b) 1; c) e^3 . 19. a) 0; b) 0; c) 0.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real. A₁: 1. B. 2. D. 3. a) A; b) $y=2x-1$; c) $S=\mathbb{R}^*$; e) $O(0, 0)$. 4. a) $S=\left\{0, 1\frac{1}{3}\right\}$;

b) $S=\{e^{-1}\}$; c) $S=\{0\}$. 5. $S=[0, +\infty)$. 6. a) 4 s; b) 6 s. **B₁:** 7. a) $(\cos x) \sin(\sin x) dx$;

b) $(-\sin x) \cos(\cos x) dx$; c) $\frac{1}{x \ln x} dx$. 8. a) $S=\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $S=\{0\}$. 9. a) 1) $f'_s(0)=f'_d(0)=0$; 2) $f'_s(3)=0, f'_d(3)=3$; 3) $f'_s(0)=2, f'_d(0)=0$.

11. *Indicație.* Aplicați corolarele teoremei lui Rolle. 12. Funcția f este continuă pe $[1, +\infty)$, dar nu este derivabilă în punctul $x_0=2$. 14. $c=\frac{1}{2}$. 15. a) Funcția f verifică condițiile teoremei lui Rolle

și $c=2$; b) funcția f verifică condițiile teoremei lui Rolle și $c=\frac{\pi}{2}$; c) funcția f verifică condițiile

teoremei lui Rolle și $c = \frac{12 \pm \sqrt{3}}{3}$. 16. $\frac{2}{3}$. **C₁:** 18. $S = \{0, 1\}$. 19. a) $m = -1$; b) în momentul $t = 0$, $v(0) = -1$, $a(0) = -3$; în momentul $t = \frac{\pi}{4}$, $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{-\frac{\pi}{4}}$, $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4e^{-\frac{\pi}{4}}$. 20. $a \in \left\{1, \frac{9}{7}\right\}$.

Test sumativ

Profilul real. 1. a) A; b) $S = \left\{(k+1)\frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; c) $y = 6x - (6\pi + 1)$; d) $\frac{18}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$.
2. $e^{-\frac{1}{2}}$. 3. a) $a = \ln 2$, $b = 0$, $d = 1$; b) $c = 0$. 4. 1,5 s.

Modulul 5

§ 1. Profilul real. A₁: 1. a) $f(-2) = f(2) = -4$ – minime, $f(0) = 12$ – maxim; b) $f(1) = 4$ – minim; c) $f(-5) = 0$ – maxim, $f(1) = -324$ – minim; d) $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ – maxim, $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$ – minim; e) $f(1) = 0$ – minim, $f(-1) = 4$ – maxim; f) f este strict crescătoare.
2. a) $m = -7$, $M = 9$; b) $m = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $M = 120$.

B₁: 3. a) $(-\infty, 1] \nearrow$, $[1, 3] \searrow$, $[3, +\infty) \nearrow$; b) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right] \searrow$, $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right) \nearrow$; c) $(-\infty, 3) \searrow$, $(3, +\infty) \searrow$; d) $(0, +\infty) \searrow$; e) $(-\infty, -3] \searrow$, $[-3, -\sqrt{3}) \nearrow$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \nearrow$, $(\sqrt{3}, 3] \nearrow$, $[3, +\infty) \searrow$; f) $(-\infty, -1] \nearrow$, $[1, +\infty) \nearrow$. 4. a) $a \in [1, +\infty)$; b) $a \in [-1, +\infty)$; c) $a \geq 1$. 5. $a \in [-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

8. a) $m = \min[f(-1), f(0), f(2)] = f(2) = -13$; $M = \max[f(-1), f(0), f(2)] = f(0) = 3$;

b) $m = \min(f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f(\pi)) = f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

$M = \max(f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{5\pi}{6}\right), f(\pi)) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{4}$;

c) $m = 2 - 2\ln 2$, $M = +\infty$. 9. a) $f(5) = -\frac{27}{4}$ – maxim; b) $f(2k\pi) = 1$, $f(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$, $f(2k\pi + \frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, – maxime și $f(2k\pi + \pi) = -1$, $f\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, – minime,

c) $f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1$ – maxim, $f(1) = 1 - \frac{\pi}{2}$ – minim; d) $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{e^2}{3}$; e) $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 4e^{-2}$ – maxime; $f(0) = 0$ – minim; f) $f(1) = 0$ – minim; $f(e^2) = 4e^{-2}$ – maxim; g) $f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{9^{3\sqrt{6}}}{8}$ – maxim; $f(1) = 0$ – minim; h) $f(0) = 0$ – maxim; $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ – minim; i) $f(-1) = e^{-1}$ – maxim; $f(2) = 4\sqrt{e}$ – minim.

C₁: 10. a) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; b) $(-\infty, 0) \searrow$, $(0, 1) \nearrow$, $(1, +\infty) \searrow$; c) din b) rezultă că $f(3) > f(5) \Rightarrow \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{16} \Rightarrow \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{16} > \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{4}$. 12. $m = -\pi$, $M = \pi$.

§ 2. Profilul real. A₁: 1. a) Strict concavă pe $(-\infty, -3)$ și strict convexă pe $(-3, +\infty)$; b) strict convexă pe $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ și strict concavă pe $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$; c) strict concavă pe intervalele $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, și strict convexă pe intervalele $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; d) strict concavă pe $(-\infty, 0)$ și strict convexă pe $(0, +\infty)$; e) strict convexă pe $(-\infty, 0)$ și strict concavă pe $(0, +\infty)$; f) strict concavă pe $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ și strict convexă pe $\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$; g) strict convexă pe intervalele $\left(e^{\frac{2k\pi - \pi}{4}}, e^{\frac{2k\pi + 3\pi}{4}}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, și strict concavă pe intervalele $\left(e^{\frac{2k\pi + 3\pi}{4}}, e^{\frac{2k\pi + 7\pi}{4}}\right)$,

$k \in \mathbb{Z}$. 2. *Indicație.* Determinați mai întâi punctele în care $f'' = 0$ și punctele în care f'' nu există sau este infinită, apoi discutați semnul lui f'' în vecinătatea punctelor găsite.

§ 3. *Profilul real.* B₁: 3. c) $\mathcal{A}_{\max} = \frac{a^2}{2}$.

§ 4. *Profilul real.* A₁: 1. a) $v(0) = s'(0) = 12$ m/s. b) Peste 2 secunde. Distanța este de 16 m.

2. $v(t) = 3at^2 + b$; $a(t) = v'(t) = 6at$. 3. *Indicație.* $v(t) = 3t^2 - 12t$; $a(t) = 6t - 12$, $a(t) = 0 \Rightarrow t = 2$, $v_{\min} = v(2) = -12$. B₁: 4. $R = r$, $P_{\max} = P(r) = \frac{E^2}{4r}$. C₁: 6. 4225 de lei. 7. *Indicație.* Beneficiul brut $B(x) = p(x) \cdot x - C(x)$. $x = 11$ unități, $B_{\max} = 479$ u.m. 8. $AM = 64$ km.

Exerciții și probleme recapitulative

A₁. 1. a) $(-\infty, -4] \nearrow$, $[-4, 0] \searrow$, $[0, +\infty) \nearrow$; b) $(-\infty, -\frac{1}{3}] \nearrow$, $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \searrow$, $[\frac{1}{3}, +\infty) \nearrow$.
2. a) $(-\infty, -1] \searrow$, $[-1, +\infty) \nearrow$; b) $(-\infty, 0] \nearrow$, $[0, 1] \searrow$, $[1, +\infty) \nearrow$; c) $(-\infty, -2] \searrow$, $[-2, -\frac{1}{2}] \nearrow$, $[-\frac{1}{2}, +\infty) \nearrow$; d) $(-\infty, \frac{4}{5}] \nearrow$, $[\frac{4}{5}, 2] \searrow$, $[2, +\infty) \nearrow$; e) $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \searrow$, $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \nearrow$, $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty) \searrow$; f) $(-\infty, 1] \searrow$, $[1, +\infty) \nearrow$. 3. a) $(-\infty, -1] \searrow$, $[-1, +\infty) \nearrow$; b) $(-\infty, -\frac{3}{2}] \searrow$, $[-\frac{3}{2}, 0] \nearrow$, $[0, \frac{3}{2}] \searrow$, $[\frac{3}{2}, +\infty) \nearrow$; c) $(-\infty, -2] \nearrow$, $[-2, 2] \searrow$, $[2, +\infty) \nearrow$; d) $(-\infty, +\infty) \nearrow$; e) $(-\infty, -1] \nearrow$, $[-1, 1] \searrow$, $[1, +\infty) \nearrow$; f) $(-\infty, -\frac{2}{5}] \nearrow$, $[-\frac{2}{5}, 0] \searrow$, $[0, +\infty) \nearrow$. 4. a) $m = -3$, $M = 2$; b) $m = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$, $M = 8$.
6. a) $a = 2$; b) $a = -\frac{3}{2}$. 7. $B_{\max} = B(39) = 4\,443$ lei. B₁. 9. a) $(-\infty, -1] \searrow$, $[-1, +\infty) \nearrow$; b) $(-\infty, -1] \searrow$, $[-1, 1] \nearrow$, $[1, +\infty) \searrow$; c) $(0, e^{-\frac{1}{2}}] \searrow$, $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty) \nearrow$. 10. $m \in (-\infty, -1]$. 11. a) Strict concavă pe $(-\infty, -1)$ și strict convexă pe $(-1, +\infty)$; b) strict concavă pe $(0, \pi)$ și strict convexă pe $(\pi, 2\pi)$; c) strict concavă pe intervalele $(-\infty, -\sqrt{3})$ și $(0, \sqrt{3})$ și strict convexă pe intervalele $(-\sqrt{3}, 0)$ și $(\sqrt{3}, +\infty)$; d) strict convexă pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$. 12. a) $x = 0$; b) $x = 0$; c), d) nu are puncte de inflexiune; e) $x = e$; f) $x = 0$, $x = 4$. 16. a) $m \in [0, 1]$; b) $m \in \emptyset$; c) $m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; d) $m = 1$. 17. $x = 26$, $B_{\max} = B(26) = 336$ lei.
18. $a \in (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$. 19. Lățimea $\frac{40}{3}$ m, lungimea 30 m.

Test sumativ

Profilul real. 1. A. 3. $m = -\infty$, $M = 2 \ln 2$. 5. $V_{\max} = 1000$ u.m. și se realizează pentru impozitul de 50 u.m. pentru o unitate de produs.

Modulul 6

§ 1. *Profilurile umanist, arte, sport.* A: 1. a) $3 + 2i$; b) $2 - 2i$; c) $\sqrt{3} + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{3})i$; d) $14 + 2i$; e) $\sqrt{6} + \sqrt{3} + (\sqrt{2} - 3)i$; f) $\frac{1}{13}(8 - i)$; g) $\frac{1}{10}(3 - i)$; h) $25 - 22i$; i) $-2 + 2i$. 2. 1) a) i ; b) -1 ; c) 1 ; d) $-i$; e) 1 ; 2) $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. B: 3. a) $x = -33$, $y = 20$; b) $x = -\frac{1}{7}$, $y = \frac{2}{7}$; c) $x = -11$, $y = -8$; d) $x = \frac{1}{3}(3 - 4\sqrt{3})$, $y = 8 - \sqrt{3}$. 4. 1) d), f) g), i); 2) a) $S = \left\{ \frac{-3 \pm i\sqrt{15}}{4} \right\}$;

b) $S = \left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$; c) $S = \left\{ \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2} \right\}$; d) $S = \left\{ \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \right\}$; e) $S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{19}}{2} \right\}$; f) $S = \left\{ -7, \frac{1}{3} \right\}$;
 g) $S = \left\{ \frac{-5}{2}, 1 \right\}$; h) $S = \{-1 \pm i\}$; i) $S = \{-2 \pm \sqrt{5}\}$. 5. a) 22i; b) 36. **C:** 6. a) $S = \{2 - i\}$;
 b) $S = \left\{ \frac{-1}{29}(1 + 12i) \right\}$; c) $S = \left\{ \frac{1}{3}(9 - 13i) \right\}$; d*) $S = \{2 + i\}$. 7. a) $S = \left\{ 1 - i, -\frac{1}{3} \right\}$;
 b) $S = \left\{ \frac{1}{2}((2 + i)z_2 - i, z_2), z_2 \in \mathbb{C} \right\}$. 8. a) $\{-1 \pm i\}$; b) nu există; c) nu există.

Profilul real. A₁: 1. a) $-1 + 2i$; b) $6 - 2i$; c) $\sqrt{3} + \sqrt{2} - (1 + \sqrt{3})i$; d) $-10 - 10i$;
 e) $6 - \sqrt{3} - (3 + \sqrt{2})i$; f) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$; g) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$; h) $21 - 20i$; i) $2 + 2i$. 2. 1) a) $-i$; b) 1; c) 1; d) $-i$;
 e) -1 ; 2) $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$. 3. a) $x = \frac{37}{11}, y = \frac{20}{11}$; b) $x = -\frac{1}{7}, y = -\frac{2}{7}$; c) $x = -\frac{7}{5}, y = -\frac{8}{5}$;
 d) $x = -\frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}, y = 8 + \sqrt{3}$. 4. a) $S = \left\{ \frac{3 - i\sqrt{15}}{4}, \frac{3 + i\sqrt{15}}{4} \right\}$; b) $S = \left\{ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right\}$;
 c) $S = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{15}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{15}}{2} \right\}$; d) $S = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{4\sqrt{2} - 1}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1 + i\sqrt{4\sqrt{2} - 1}}{2\sqrt{2}} \right\}$; e) $S = \left\{ \frac{1 - 3i}{2}, \frac{1 + 3i}{2} \right\}$;
 f) $S = \left\{ \frac{-2 - i\sqrt{31}}{5}, \frac{-2 + i\sqrt{31}}{5} \right\}$; g) $S = \left\{ \frac{5 - i\sqrt{127}}{4}, \frac{5 + i\sqrt{127}}{4} \right\}$; h) $S = \{1 - i, 1 + i\}$; i) $S = \{-2 - i, -2 + i\}$.
 5. a) 4; b) $-52i$. 6. a) $S = \{1 + 2i\}$; b) $S = \left\{ \frac{1}{5}(3 - 4i) \right\}$; c) $S = \left\{ -\frac{5}{3} + 5i \right\}$; d*) $S = \left\{ \frac{1}{2}(4 - 3i) \right\}$.

B₁: 7. a) $S = \left\{ 1 - i, -\frac{1}{3} \right\}$; b) $S = \left\{ \frac{1}{2}((2 + i)z_2 - i, z_2), z_2 \in \mathbb{C} \right\}$. 8. a) $\{1 \pm i\}$; b) nu există; c) $\{3i\}$.
 9. a) 0; b) $\frac{1}{130}(19 - 3077i)$. 10. a) $z^4 + 4$; b) $z^4 - 1$; c) $a^2 - ab + b^2$. **C₁:** 13. $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} + i \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$.
 14. a) Da; b) nu; c) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

§ 2. Profilul real. A₁: 1. b) Numerele reale; numerele pur imaginare și zero; c) $|z|$.
 2. a) $\{\pm(1 - i)\}$; b) $\{\pm(2 - 3i)\}$; c) $\{\pm(7 + i)\}$; d) $\{\pm(\sqrt{3} - i)\}$; e) $\{\pm(\sqrt{3} - i\sqrt{2})\}$; f) $\{\pm(\sqrt{2} + i\sqrt{3})\}$.

B₁: 3. 1) a) $S = \{-1 + i, -3 - i\}$; b) $S = \{1 + 2i, -6i\}$; c) $S = \{i, -3 + i\}$; d) $S = \left\{ -3 + i, \frac{3 - i}{2} \right\}$;
 e) $S = \{-1 + i, 1 - i\}$; f) $S = \{-7 - i, 7 + i\}$. 2) Da. 4. $\{\pm(\beta - \alpha i)\}$. 5. a) $5(\cos \pi + i \sin \pi)$;
 b) $3 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$; c) $2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]$; d) $2\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$;
 e) $\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$; f) $4 \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right)$; g) $\cos \left(\arctg \frac{4}{3} \right) + i \sin \left(\arctg \frac{4}{3} \right)$;
 h) $\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \varphi \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \varphi \right)$; i) $2^{-50}(\cos \pi + i \sin \pi)$. **C₁:** 6. a) 1; b) $-64(1 + i)$; c) $512(1 - i\sqrt{3})$.
 7. a) $\left\{ -i, \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2} \right\}$; b) $\left\{ -3, \frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \right\}$; c) $\left\{ \pm \frac{1}{2}[(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1)i], \pm \frac{1}{2}[(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i] \right\}$;
 d) $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i) \right\}$. 8. a) i; b) $2 - i, -2 - i$.

§3. Profilul real. A₁: 1. a) $S = \left\{ \sqrt[8]{2} \left(\cos \frac{1}{48} (23\pi + 24k\pi) + i \sin \frac{1}{48} (23\pi + 24k\pi) \right) \mid k = \overline{0, 3} \right\}$;

b) $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{1}{36} (-\pi + 24k\pi) + i \sin \frac{1}{36} (-\pi + 24k\pi) \right) \mid k = \overline{0, 2} \right\}$; c) $S = \{\pm 1, \pm \sqrt{6}\}$; d) $S = \{\pm 1, \pm i\sqrt{2}\}$;

e) $S = \{\pm \sqrt{2}, \pm i\sqrt{3}\}$. 2. $S = \{0, -1, 1\}$. **B₁:** 3. $S = \left\{ \frac{\varepsilon_k + 1}{\varepsilon_k - 1} \mid \varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}, k = \overline{0, 3} \right\}$.

4. a) $S = \left\{ -i, i, \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \right\}$; b) $S = \left\{ 2 \pm \sqrt{3}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$; c) $S = \left\{ -1, \frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right\}$.

C₁: 6. a) $-5i$; b) 5 ; c) nu aparține.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. a) $1 + 2i$; b) $2 - 2i$; c) $-10 - 10i$; d) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$; e) $-i$; f) 1 ;

g) $-i$. 3. a) $S = \{\pm 2i\}$; b) $S = \{\pm 4 + 3i\}$; c) $S = \left\{ \frac{1}{2}(-1 \pm i) \right\}$. **B:** 4. 1. 5. a) $-4(\sqrt{3} + i)$; b) $-\frac{1}{4}$.

C: 6. a) $2 + i$; b) $\frac{127}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-i$; d) $\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$. 7. $z = \frac{\sqrt{3}}{3} - i$.

Profilul real. A₁: 1. a) $1 - 2i$; b) $2 + 2i$; c) $-10 + 10i$; d) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$; e) i ; f) 1 ; g) i . 3. a) $S = \{\pm 3i\}$;

b) $S = \{\pm 4 + 2i\}$; c) $S = \left\{ \frac{1}{2}(1 \pm i) \right\}$. 4. 1. 5. a) $-4(\sqrt{3} - i)$; b) $-\frac{1}{4}$. 6. a) $2 + i$; b) $\frac{127}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $-i$; d) $\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$. **B:** 7. $z = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$. 8. -64 . 9. a) $S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}i, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}i \right\}$; b) $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} + i \right\}$;

c) $S = \{1 + i\}$; d) $S = \{0, \pm i\}$; e) $S = \{1 - i, 0, 8 - 0, 4i\}$. 10. a) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. 11. a) $\left\{ \sqrt[3]{4}(\cos \varphi_i + i \sin \varphi_i) \mid \varphi_i \in \left\{ \frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9} \right\} \right\}$;

b) $\left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{4}}(\cos \varphi_i + i \sin \varphi_i) \mid \varphi_i \in \left\{ \frac{7\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{31\pi}{18} \right\} \right\}$. 12. a) -2^6 ; b) -2^7 ; c) 2^9 .

C₁: 13. -1 . *Indicație.* Înmulțiți egalitatea cu $z - 1$; se obține $z^4 = z$. 14. $n = 4k, k \in \mathbb{N}$.

15. b) Punctele M_1 și M_3 . 16. a) $S = \{-1 \pm i\sqrt{2}\}$; b) $\sqrt{3}$; c) imaginea soluției $-1 + i\sqrt{2}$ aparține cercului, iar a soluției $-1 - i\sqrt{2}$ - nu.

Test sumativ

Profilurile umanist, arte, sport. 1. $x = 1, y = \frac{1}{5}$. 2. a) $\frac{5}{3} - \frac{17}{5}i$; b) $\frac{11}{50} - \frac{23}{50}i$. 3. $S = \left\{ \frac{2}{17}(4 - i) \right\}$.

4. b) $S = \left\{ \frac{1 \pm 3i\sqrt{10}}{7} \right\}$. 5. a) $2i$; b) C.

Profilul real. 1. a) $-\frac{11}{3} - \frac{8 + \sqrt{3}}{2}i$; b) $-\frac{23}{53} + \frac{1}{53}i$. 2. a) Nu are; b) $S = \left\{ \frac{-\sqrt{7} \pm 7i}{4} \right\}$.

3. $z_1 = -i, z_2 = -1 - i$. 4. $2^4 + 2^4 \cdot i$. 5. a) Pentru $z \in \mathbb{R}$ numărul $2z^3$ este real;

b) $S = \left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right), -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}i \right\}$. 6. b) Nu.

Modulul 7

§1. Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. a) $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & -3 & -1-i \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ i & 2+2i \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2+i & -1+i \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \\ 9 & 3i \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 2i & 4 \\ 4 & 0 & -2i \\ -2 & 14 & 6 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 6i & -2 & 10i \\ 0 & 4i & -2 \\ 2i & -2-2i & -6i \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 5i & -1+i \\ 4 & 5i \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & i \end{pmatrix}$. 2. Nu există astfel de numere. 3. a) $AB = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 12 & 51 \end{pmatrix}$;

$BA = \begin{pmatrix} 17 & 43 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$; b) $AB = \begin{pmatrix} 6 & -42 & -48 \\ -18 & 14 & 8 \end{pmatrix}$, BA nu există, c) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 27 & 0 \\ 12 & 4 & 6 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

$BA = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 0 \\ 18 & 4 & 3 \\ 33 & 10 & 7 \end{pmatrix}$; d) $AB = \begin{pmatrix} a+x & 1+x & a+1+x \\ b+y & 1+y & b+1+y \\ c+z & 1+z & c+1+z \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} a+c & 2 & x+z \\ b+c & 2 & y+z \\ a+b+c & 3 & x+y+z \end{pmatrix}$; e) AB nu

există, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 10 & 24 \\ -1 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$; f) $AB = BA = A$. 4. a), b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 46 & 32 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}$. B: 5. a) $\begin{pmatrix} -9 & -62 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$; b), e) nu există;

c) $\begin{pmatrix} -46 & 9 & 27 \\ 39 & -69 & 27 \\ 96 & 144 & -63 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} a^2+bd+cg-1 & ad+ed+fg & ag+hd+ig \\ ab+bc+ch & bd+e^2+fh-1 & bg+ch+ih \\ ac+bf+ci & dc+ef+fi & cg+fh+i^2-1 \end{pmatrix}$. 6. a) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 18 & 0 \\ 12 & 2 & 6 \\ 22 & 10 & 13 \end{pmatrix}$. 7. a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 16 & 16 & 8 \\ 16 & 16 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

C: 8. $T_1 = 1,1 \cdot T = \begin{pmatrix} 2,2 & 3,3 & 4,4 & 2,2 & 3,3 \\ 4,4 & 2,2 & 3,3 & 6,6 & 3,3 \\ 3,3 & 1,1 & 2,2 & 3,3 & 5,5 \end{pmatrix}$. 9. $M = M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 13 & 11 & 11 \\ 19 & 11 & 9 & 5 & 12 \\ 12 & 13 & 9 & 17 & 8 \end{pmatrix}$.

10. a) În a doua clasă. 11. Nu.

Profilul real. A₁: 1. a) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -3 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3+i & i \\ 1+i & 2+2i \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & -2+i \\ 2i & -1+i \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -3 & 6 & 3i \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2i & 0 & 14 \\ 4 & -2i & 6 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 6i & 0 & 2i \\ -2 & 4i & -1-2i \\ 10i & -2 & -6i \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 5i & 4 \\ -1+i & 5i \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ i & 0 & 2 \\ 1 & -2 & i \end{pmatrix}$.

2. $x=2$, $y=1$, $z=-1$, $u=0$. 3. a) $AB = \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 43 & 30 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 5 & 51 \end{pmatrix}$; b) AB nu există,

$$BA = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ -42 & 14 \\ -48 & 8 \end{pmatrix}; \text{ c) } AB = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 33 \\ 18 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 11 \\ 27 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \text{ d) } AB = \begin{pmatrix} a+c & b+c & a+b+c \\ 2 & 2 & 3 \\ x+z & y+z & x+y+z \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ 1+x & 1+y & 1+z \\ a+1+x & b+1+y & c+1+z \end{pmatrix}; \text{ e) } AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}, BA \text{ nu există; f) } AB = BA = A. \text{ 4. a), b) } \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 46 & -10 \\ 32 & -8 \end{pmatrix}; \text{ d) } \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}; \text{ e) } \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}; \text{ f) } \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}; \text{ g) } \begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix}. \text{ B: 5.1) a) } \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -62 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{b), e) nu există; c) } \begin{pmatrix} -46 & 39 & 96 \\ 9 & -69 & 144 \\ 27 & 27 & -63 \end{pmatrix}; \text{ f) } \begin{pmatrix} a^2+bd+cg-1 & ab+bc+ch & ac+bf+ci \\ ad+ed+fg & bd+e^2+fh-1 & dc+ef+fi \\ ag+hd+ig & bg+eh+ih & cg+fh+i^2-1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \text{ Nu. 6. a) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}; \text{ b) nu există; c) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 12 & 22 \\ 18 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}; \text{ d) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-a & -b & 2-c \\ -1 & 1 & 1 \\ 2-x & 2-y & 2-z \end{pmatrix};$$

$$\text{e) nu există; f) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-a & -b & -c \\ -d & 2-e & -f \\ -g & -h & 2-i \end{pmatrix}. \text{ 7. } T_1 = 1,1 \cdot T = \begin{pmatrix} 2,2 & 3,3 & 4,4 & 2,2 & 3,3 \\ 4,4 & 2,2 & 3,3 & 6,6 & 3,3 \\ 3,3 & 1,1 & 2,2 & 3,3 & 5,5 \end{pmatrix}.$$

$$8. M = M_1 + M_2 + M_3 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 13 & 11 & 11 \\ 19 & 11 & 9 & 5 & 12 \\ 12 & 13 & 9 & 17 & 8 \end{pmatrix}. \text{ 9. a) } \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} c_k & c_{k-1} \\ c_{k-1} & c_{k-2} \end{pmatrix}, c_i - \text{numere}$$

$$\text{Fibonacci: } c_{-1}=0, c_0=1, c_k=c_{k-1}+c_{k-2}; \text{ c) } \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}; \text{ d) } \begin{pmatrix} -33 & 19 & 32 \\ 4 & 47 & -1 \\ -5 & -50 & -29 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 6 & 21 & -10 & 17 \\ -1 & 54 & -51 & 30 \\ -4 & -39 & 20 & 7 \\ 26 & 19 & -2 & 71 \end{pmatrix}. \text{ 10. a) } \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 16 & 16 & 8 \\ 16 & 16 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}. \text{ C: 12. } S = \begin{pmatrix} 15,1 & 11,7 \\ 10,3 & 8,1 \\ 15,4 & 11,8 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}.$$

$$13. \text{ a) În a doua clasă. 14. b) De exemplu, } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

§2. Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. 1) a) -10; b) 24; c) -a; d) -17i; e) 9-10i; f) -374;

$$\text{g) } -11; \text{ h) } -22; \text{ i) } 4; \text{ j) } -18. \text{ 2. 1) a) } i) - \text{poate fi aplicată. 2) a) } S = \left\{ \left(\frac{11}{7}, \frac{-2}{7} \right) \right\}; \text{ b) } S = \left\{ \left(\frac{13}{23}, \frac{-2}{23} \right) \right\};$$

$$\text{c) } S = \left\{ \left(\frac{19}{14}, \frac{3}{14} \right) \right\}; \text{ d) } S = \left\{ \left(\frac{21}{8}, \frac{-27}{8} \right) \right\}; \text{ e) } S = \left\{ \left(\frac{mp-nq}{m^2+n^2}, \frac{mq+np}{m^2+n^2} \right) \right\}; \text{ f) } S = \{(1, 0, 1)\};$$

$$\text{g) } S = \{(1, 3, 2)\}; \text{ h) } S = \{(2, 1, 3)\}; \text{ i) } S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3} \right) \right\}; \text{ j) nu poate fi aplicată regula lui Cramer.}$$

$$\text{B: 3. a) } S = \{(1-i, -i)\}; \text{ b) } S = \{(2-i, 2+i)\}; \text{ c) } S = \{(3+11i, -3+9i, 1+7i)\}.$$

$$4. S = \left\{ \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{8} \right\}. \text{ C: 5. a) } f(x) = x^2 - 3x + 8; \text{ b) nu există; c) } x_0 = \frac{3}{2}, f(x_0) = \frac{23}{4}.$$

6. a) *Indicație.* Adunați la liniile doi și trei linia întâi înmulțită cu -1 . $(a-b)(c-a)(c-b)$; b) $(x-a)^2(2a+x)$; c) $-2(x^3+y^3)$. 7. a) $S = \{1, 2\}$; b) $S = \{0, 3a\}$.

Profilul real. A₁: 1. 1) a) -10 ; b) 24 ; c) $-a$; d) $-17i$; e) $9-10i$; f) -374 ; g) -11 ; h) -22 ; i) 4 ; j) -18 .

2. 1) a)–i) poate fi aplicată. 2) a) $S = \left\{ \left(\frac{11}{7}, -\frac{2}{7} \right) \right\}$; b) $S = \left\{ \left(\frac{13}{23}, -\frac{2}{23} \right) \right\}$; c) $S = \left\{ \left(\frac{19}{14}, \frac{3}{14} \right) \right\}$;

d) $S = \left\{ \left(\frac{21}{8}, -\frac{27}{8} \right) \right\}$; e) $S = \left\{ \left(\frac{ac-bd}{a^2+b^2}, \frac{ad+bc}{a^2+b^2} \right) \right\}$; f) $S = \{(1, 0, 1)\}$; g) $S = \{(1, 3, 2)\}$; h) $S = \{(2, 1, 3)\}$;

i) $S = \left\{ \left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3} \right) \right\}$; j) nu poate fi aplicată regula lui Cramer. 3. a) -20 ; b) 0 ; c) 0 ; d) -15 ; e) 36 .

4. 1) a)–g) inversabile; 2) a) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; d) $-\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}$;

e) $\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 12 & 2 & -9 \end{pmatrix}$; f) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **B₁: 5.** $S = \left\{ \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{8} \right\}$.

6. a) $f(x) = x^2 - 3x + 8$; b) nu există; c) $x_0 = \frac{3}{2}$, $f(x_0) = \frac{23}{4}$. 8. a) $S = \{(1+i, i)\}$; b) $S = \{(2+i, 2-i)\}$;

c) $S = \{(3-11i, -3-9i, 1-7i)\}$. 9. a) 4 u.p.; b) coliniare; c) $\frac{27}{2}$ u.p.; d) 13 u.p. 10. $X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

$Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. 11. a) $S = \{1, 2\}$; b) $S = \{0, 3a\}$. **C₁: 12.** a) Se va schimba în opus; b) nu se va

schimba. 13. Se va schimba în număr complex conjugat. 14. Determinantul se va înmulți cu α^3 .

15. *Indicație.* Dezvoltați determinantul după coloana a treia. 16. a) *Indicație.* Adunați la liniile doi și trei linia întâi înmulțită cu -1 . $(a-b)(c-a)(c-b)$; b) $(x-a)^2(2a+x)$; c) $ab(a^2+b^2-cb) + c(c^3-b^2c-a^3)$.

17. a) *Indicație.* Adunați la linia întâi linia a treia și scoateți factorul comun. $(a^2+b^2+c^2)(a-b)(a-c)(c-b)(a+b+c)$; b) $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.

§ 3. Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. a), b), d) nu este soluție; c) este soluție.

2. a) $S = \{(1, 1)\}$; b) $S = \{(1, -1)\}$; c) $S = \{(1, 2)\}$; d) $S = \{(1, 0)\}$; e) $S = \{(1, 0, 1)\}$; f) $S = \{(1, -3, 3)\}$; g) $S = \{(1, 1, -2)\}$; h) $S = \{(1, 2, -2)\}$. **B: 3, 4, 5 u.m.; 4 u.m..** 4. a) se adună

membru cu membru ecuațiile 1 și 3; b) se adună membru cu membru ecuațiile 2 și 3.

C: 5. a) $\begin{cases} 2x+y+z=28,3, \\ x+2y+z=24,6, \\ x+y+2z=24,3. \end{cases}$ Prețurile: 9 u.m.; 5,3 u.m.; 5 u.m. de la F_1 , F_2 , F_3 respectiv; b) prețurile

se determină neunivoc. 6. a) *Indicație.* Înlocuiți ecuația a treia cu $2x-z=2$; b) *Indicație.* Înlocuiți ecuația a treia, de exemplu, cu suma membru cu membru a primelor două ecuații.

Profilul real. A₁: 1. a), b), d) nu este soluție; c) este soluție. 2. a) $S = \{(1, 1)\}$; b) $S = \{(1, -1)\}$; c) $S = \{(1, 2)\}$; d) $S = \{(1, 0)\}$; e) $S = \{(1, 0, 1)\}$; f) $S = \{(1, -3, 3)\}$; g) $S = \{(1, 1, -2)\}$;

h) $S = \{(1, 2, -2)\}$. 3. a) $S = \left\{ \left(\frac{-2+4i}{15}, \frac{1-2i}{3}, \frac{-4+3i}{15} \right) \right\}$; b) $S = \{(1, 2, -2)\}$; c) $S = \{(-1, -1, 0, 1)\}$.

4. a) $S = \{(-3\alpha, \alpha, -\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; b) $S = \{(\alpha, 3\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$; c) $S = \{(0, 0, 0)\}, \lambda \neq 0$; $S = \{(-\alpha, -2\alpha, \alpha)\}, \lambda = 0$; d) $S = \{(0, 0, 0)\}, \lambda \in \mathbb{R}$.

B₁: 5. a) 4,5 u.m.; 4 u.m. 6. a), d), e), f) compatibil; b), c) incompatibil.

7. a) $S = \left\{ \left(\frac{1}{5}(11-\alpha), \frac{2}{5}(-1+\alpha), \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}$; soluție particulară: (3, -2, -4); d) $S = \{(1, 2, -2)\}$;

e) $S = \{(1, 2, 1)\}$; f) $S = \{(\lambda, 1, 0)\}$, $\lambda \neq 0$; $S = \{(-\alpha, 1-2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$, $\lambda = 0$.

8. $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. **C₁:** 9. a) $\begin{cases} 2x+y+z=28,3, \\ x+2y+z=24,6, \\ x+y+2z=24,3. \end{cases}$ Prețurile: 9 u.m.; 5,3 u.m.; 5 u.m. de la

F_1, F_2, F_3 respectiv; b) sistemul respectiv va fi compatibil nedeterminat, deci prețurile se determină neunivoc. 10. *Indicație.* a) Înlocuieți ecuația a treia cu $3x+2z=3$; b) înlocuieți ecuația a treia cu suma membru cu membru a primelor două ecuații. 11. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -i & 3 & 1+2i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2i & 0 & -i \\ 1 & 3i & -2+i \end{pmatrix}$. 2. 1) a) 2×2 ;

b) 3×3 ; c) 2×2 ; d) 1×3 ; e) 3×3 ; f) nu există. 2) a) $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} i & 2 \\ -2i & -6 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 11 & -7 & 29 \\ 9 & -9 & 32 \\ 13 & -5 & 26 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 11 & -7 & 29 \\ 9 & -9 & 32 \\ 13 & -5 & 26 \end{pmatrix}$; f) nu există. 3. a) $x=-1, y=2$; b) $x=5, y=11$ sau

$x=-1, y=5$. 4. a) -i; b) 0; c) -70; d) -88; e) 0; f) -21i; g) 0; h) 0. 5. a) $S = \{(2, 1)\}$; b) $S = \{(i, 1)\}$;

c) $S = \{(1, 1, 1)\}$; d) $S = \{(3, 2, 1)\}$; e) $S = \emptyset$; f) $S = \left\{ \left(1, \frac{1}{2} \right) \right\}$; g) $S = \{(4, 5, 0)\}$; h) $S = \{(2, 3, -1)\}$.

B: 6. $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 7. 1×2 . 8. 5 gândaci și 3 păianjeni. **C:** 9. $\alpha \neq \pm 2$. 10. În vasul I - 1,5 l, în vasul II - 9 l.

11. Persoana I - 2 000 u.m., persoana II - 3 000 u.m., persoana III - 5 000 u.m.

Profilul real. A₁: 1. a) $\begin{pmatrix} 5 & i & -3 \\ -2i & 8 & 2+7i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3i & 1 & -i \\ 2 & 4i & -1+2i \end{pmatrix}$. 2. 1) a) 2×2 ; b) 3×3 ; c) 2×2 ;

d) 3×1 ; e) 3×3 . 2) a) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} i & -2i \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -5 \\ 52 \\ -33 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 11 & 9 & 13 \\ -7 & -9 & -5 \\ 29 & 32 & 26 \end{pmatrix}$.

3. a) $x=1, y=-3$; b) $x=1, y=2, u=0, v=3$. 4. a) -i; b) 0; c) -70; d) -88; e) 0; f) -21i; g) 0; h) 0. 5. 1) e), g) incompatibil. 2) a) $S = \{(2, 1)\}$; b) $S = \{(i, 1)\}$; c) $S = \{(1, 1, 1)\}$;

d) $S = \{(3, 2, 1)\}$; e) $S = \emptyset$; f) $S = \left\{ \left(1, \frac{1}{2} \right) \right\}$; g) $S = \emptyset$; h) $S = \{(2, 3, -1)\}$. 6. a) 1; b) 36; c) -15.

7. a) $\begin{pmatrix} 2 & -i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$; b), e), g), h) nu există A^{-1} ; c) $\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 14 & -14 & 14 \\ -34 & 14 & -4 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{88} \begin{pmatrix} -6 & 20 & -15 \\ 30 & -12 & 31 \\ -20 & 8 & -6 \end{pmatrix}$;

f) $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 17 & -8 & 5 \\ -16 & 10 & -1 \\ 6i & -9i & 3i \end{pmatrix}$. 8. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{13}{36} & \frac{7}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{7}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

$$\text{c) } A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & -8 \\ 7 & 2 & -15 & 17 \\ 2 & -8 & 0 & 7 \\ -8 & 2 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

$$\text{9. a) } S = \left\{ \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}t, \frac{19}{6} + \frac{1}{6}t, \frac{11}{6} + \frac{11}{6}t, t \right) \mid t \in \mathbb{C} \right\};$$

$$\text{b) } S = \{(5-3t, -5+2t, 1-t, t) \mid t \in \mathbb{C}\}; \text{ c) } S = \{(-5+2\lambda+4t, -1+\lambda+t, \lambda, t) \mid \lambda, t \in \mathbb{C}\};$$

$$\text{d) } S = \left\{ \left(\frac{1}{6} + 5t, \frac{1}{6} - \frac{7}{6}t, \frac{1}{6} + 5t, 6t \right) \mid t \in \mathbb{C} \right\}. \text{ 10. În vasul I } - 7,5 \text{ l, în vasul II } - 45 \text{ l. } \mathbf{B_1:} \text{ 11. } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{12. } 1 \times 2. \text{ 13. a) } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{16}{3} \right\}; \text{ b) } \alpha \in \mathbb{C}^*. \text{ 14. a) } S = \left\{ \frac{1}{2}(1 \pm i) \right\}; \text{ b) } S = \{-2, 0, 1 \pm i\}.$$

15. a) $S = \{(-5\alpha, \alpha, t, -3\alpha + t) \mid \alpha, t \in \mathbb{C}\}$; b) pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$, $S = \{(0, 0, 0)\}$; pentru $\lambda = -2$, $S = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$; pentru $\lambda = 1$, $S = \{(\alpha, t, -\alpha - t) \mid \alpha, t \in \mathbb{C}\}$; c) pentru $\lambda \neq 1$, $S = \{(0, 0, 0)\}$; pentru $\lambda = 1$, $S = \{(2t, -3t, 5t, 4t) \mid t \in \mathbb{C}\}$. 16. Biciclistul I – 15 km/h, biciclistul II – 9 km/h.

$$\mathbf{C_1:} \text{ 17. 2. } \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 19. b) Cea mai mică valoare: } -4, \text{ cea mai mare: } 4. \text{ 20. } \mathcal{V} = 6 \text{ (un. cub.)}$$

$$\text{21. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ 22. Pentru } \alpha \neq \pm 2 \text{ sistemul este compatibil determinat; pentru } \alpha = 2 \text{ sistemul are}$$

o infinitate de soluții; pentru $\alpha = -2$ sistemul este incompatibil. 23. Persoana I – 2000 u.m., persoana II – 3000 u.m., persoana III – 5000 u.m. 24. $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. 25. $\alpha \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

Test sumativ

Profilurile umanist, arte, sport. 1. 1) a), b) se poate calcula; 2) a) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 16 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\text{2. a) Determinantul sistemului este nenul; b) } S = \{(1, -1, 0)\}. \text{ 3. } \begin{pmatrix} 0 & -6 & 24 \\ 30 & -6 & -90 \\ -38 & 8 & 122 \end{pmatrix}$$

$$\text{4. } T_1 = 0,95T = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 1,9 & 2,85 & 5,7 & 2,85 \\ 0,95 & 1,9 & 2,85 & 4,75 \\ 2,85 & 3,8 & 1,9 & 2,85 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$$

$$\mathbf{Profilul real.} \text{ 1. 1) a), b) se poate calcula; 2) a) } \begin{pmatrix} -1 & 3i & 5+6i \\ 4i & 2 & 4+2i \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 4+7i & 4+5i \\ 12-9i & -8+5i \\ 6-9i & -7+i \end{pmatrix}$$

$$\text{2. a) } \mathbb{C}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{6}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}; \text{ c) } X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 22 & 15 & -21 \\ 16 & 14 & -18 \\ -4 & -6 & 6 \end{pmatrix}. \text{ 3. a) Compatibil nedeterminat;}$$

$$\text{b) } S = \left\{ \left(1 - \frac{1}{19}\alpha, \frac{3}{38}\alpha, 1 - \frac{12}{19}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \text{ soluție particulară } (1, 0, 1, 0). \text{ 4. } C_1 - 1200 \text{ u.m.};$$

$$C_2 - 550 \text{ u.m.}; C_3 - 400 \text{ u.m.}$$

Modulul 8

§1. Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. Nu. 2. F. 3. a) Nu; b) nu; c) da. **B:** 4. a) PQ ; b) PC ; c) QC . 5. 3 plane. 6. a) 6; b) 4. 7. a), b) Niciun punct, un punct, o mulțime infinită de puncte; c) niciun punct, un punct, două puncte, o mulțime infinită de puncte. 8. Da, dacă punctele sunt necoliniare. **C:** 9. $\frac{a^2}{16}\sqrt{3}$ u.p. 10. 6 plane. 11. a) 10; b) 10.

Profilul real. A: 2. *Indicație.* Dreptele d_1 și d_2 , fiind concurente, definesc un plan α . Deoarece dreapta d_3 este concurentă cu d_1 și cu d_2 , rezultă că d_3 are două puncte diferite ce aparțin planului α . 3. *Indicație.* Dreptele AD și CB nu sunt coplanare. **B:** 4. *Indicație.* Dacă trei puncte ar fi coliniare, atunci cele patru puncte ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. 5. *Indicație.* $A \in \alpha$ și $A \notin \beta$, $B \in \beta$ și $B \notin \alpha \Rightarrow$ dreapta căutată este AB . 6. *Indicație.* Punctul $D \notin (ABC)$. **C:** 8. *Indicație.* Dacă două plane diferite au un punct comun, atunci toate punctele comune aparțin intersecției planelor α și β . 9. *Indicație.* $a \cap AB = C \subset \beta \Rightarrow \beta$ separă punctele A și B .

§2. Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. Nu. 2. Da. **B:** 3. $a \parallel c$. **C:** 5. Necoplanare.

Profilul real. B: 3. $d \parallel d_2$. 4. Dreptele d și AB sunt necoplanare. **C:** 5. $a \parallel c$. 6. Mulțimea punctelor spațiului fără punctele planului (A, d) .

§3. Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. $d \parallel MN$. **B:** 2. $EL \parallel FM$. **C:** 3. a) 10 cm; b) 6 cm; c) 16 cm; d) $\frac{bc}{a+c}$.

Profilul real. A: 1. *Indicație.* $\Delta A_1BB_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow A_1B_1 \parallel AC$ și $\Delta D_1DC_1 \sim \Delta ADC \Rightarrow D_1C_1 \parallel AC$. **B:** 2. $MN \parallel (ABC)$. **C:** 3. *Indicație.* Aplicați teorema lui Menelaus. $\frac{1}{abc}$. 4. *Indicație.* $\{M_1\} = DM \cap AB$, $\{N_1\} = DN \cap BC$, atunci $\Delta DMN \sim \Delta DM_1N_1$.

§4. Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. *Indicație.* $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$. **B:** 2. *Indicații.* a) $LM \parallel AB$ și $MN \parallel BC$; b) $\{I_1\} = PM \cap AB$; c) $\{I_2\} = PN \cap AC$; d) $(ABC) \cap (PMN) = I_1I_2$.

C: 3. $\mathcal{P}_{A_2B_2C_2} = 13,75$ cm, $\mathcal{P}_{A_3B_3C_3} = 22,5$ cm, $\mathcal{P}_{A_4B_4C_4} = 31,25$ cm.

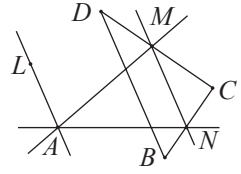
Profilul real. A: 1. 38 cm. **B:** 2. *Indicație.* $(MNP) \parallel (ABC) \Rightarrow (MNP) \cap (AED)$ este o dreaptă $d \parallel AD$ și $Q \in d$. **C:** 3. 8 cm. 4. $\mathcal{P}_1 = \frac{6\lambda+1}{7\lambda+1}\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_2 = \frac{4\lambda+1}{7\lambda+1}\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_3 = \frac{\mathcal{P}}{7\lambda+1}$. 5. *Indicații.* a) $\Delta MEN \sim \Delta AEB$ și $\Delta NEP \sim \Delta BEC$; b) $\{I\} = NR \cap BD$.

Probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. a) 17,15 dm; b) 19,5 cm; c) 54 cm. 2. $MM_1 = 12$ cm, $NN_1 = 8$ cm. **B:** 3. 12 cm. **C:** 4. *Indicație.* Dacă M_1 este mijlocul segmentului AB , atunci $\Delta MDL \sim \Delta M_1DC \Rightarrow ML \parallel M_1C$.

Profilul real. A: 3. a) $\frac{a}{\lambda}(\lambda-1)$; b) μa ; c) $\frac{l}{k}$; d) $\frac{c}{a}(a-b)$. 4. 32 cm. 6. $\frac{m+n}{2n}a$. 7. $0,25a^2 \cdot \sqrt{11}$ u.p. **B:** 8. *Indicație.* Fie I punctul de intersecție a oricăror două drepte. Dacă am presupune că a treia dreaptă intersectează una dintre cele două într-un punct diferit de I , atunci această dreaptă ar intersecta și a doua, dar în acest caz dreptele ar fi coplanare, ceea ce contrazice ipoteza. 9. Dreptele AB și DC , unde $\{D\} = a \cap AB$. 10. *Indicație.* Aplicați teorema 8'. 11. Punctul există dacă $AB \parallel DC$, adică dacă $AD:DE \neq BC:CE$. 12. *Indicație.* Aplicați proprietatea liniei

mijlocii și proprietățile paralelogramului. **13. Indicație.** Considerați un punct $M \in c$ ($M \notin \gamma$, $AM \parallel \gamma$, $BM \parallel \gamma$). Construiți $(ABM) \cap \alpha$, care este dreapta A_1B_1 , unde $\{A_1\} = a \cap AM$, $\{B_1\} = b \cap BM$ și punctul de intersecție este $AB \cap A_1B_1$. **C₁: 15. 2 m. 16.** AM , $MN \parallel DB$, AN și $AL \parallel DB$; a se vedea figura.



17. Indicație. Intersecția a două plane ce trec prin două drepte paralele este o dreaptă paralelă cu cele două drepte. **18. Indicație.** Fie $BE = EC$, atunci $[MF]$ este mediană a $\triangle ADF$. Din condiție, $AG:GE = 2:1$, deci $[AE]$ este mediană a $\triangle ADF$. **19. Indicație.** Dacă $\{I\} = AC \cap EF$, atunci $IH \cap AB$ este unul dintre punctele de intersecție, iar $FH \cap DB$ este cel de-al doilea punct. **20. 7.**

Test sumativ

Profilurile umanist, arte, sport. **1.** 8 cm. **2. a)** A_1B_1 , A_1D_1 , D_1C_1 , B_1C_1 , A_1C_1 , D_1B_1 ; **b)** (ADB) , (DCC_1) , (ABA_1) , $(D_1A_1B_1)$. **3.** $a(0,5 + \sqrt{3})$. **4.** 8 cm.

Profilul real. **1.** $a \parallel b$. **2. a)** $EF \parallel (ABC)$, **b)** $GH \parallel (ABC)$. **4.** $\frac{4}{9}A$.

Modulul 9

§ 1. Profilurile umanist, arte, sport. A: **1. Indicație.** $CD \perp CB$, $CD \perp CF \Rightarrow CD \perp (CBF)$.

2. $DA \perp CB$, $CB \parallel MN \Rightarrow MN \perp AD$. **B:** **3.** 2,4 cm. **4.** $MB = MD = 5$ cm, $MC = \sqrt{41}$ cm.

5. $AB = b$. **C:** **6.** $DE = 4\sqrt{2}$ cm, $CE = 2\sqrt{17}$ cm, $BE = 2\sqrt{13}$ cm, $d = \frac{4}{13}\sqrt{286}$ cm.

Profilul real. A₁: **1.** $AB = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$. **2.** $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4\sin^2 \alpha}}$. **B₁:** **4. Indicație.** $\triangle AEC$ isoscel $\Rightarrow$

$\Rightarrow EO \perp AC$; analog $\triangle BED$ isoscel $\Rightarrow EO \perp BD$. **C₁:** **5.** $\sqrt{a^2 + c^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$. **6. Indicație.** Dacă $d = \alpha \cap \beta$, atunci din $d_1 \perp \alpha \Rightarrow d_1 \perp d$, iar din $d_2 \perp \beta \Rightarrow d_2 \perp d \Rightarrow d \perp (d_1d_2)$.

§ 2. Profilurile umanist, arte, sport. A: **1.** a) 3 cm; b) 0,6. **2.** 24 cm.

B: **3.** 3,8 m. **4. Indicație.** a) $\triangle AVD$ isoscel, $[VO]$ – mediană; $\triangle BVE$ isoscel, $[VO]$ – mediană $\Rightarrow VO \perp (ABC)$; b) $\triangle AOV \equiv \triangle BOV \equiv \triangle COV \equiv \triangle DOV \equiv \triangle EOV \equiv \triangle FOV$. **C:** **5.** a) 3 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm. **6.** $AB = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}$.

Profilul real. A₁: **1.** $\sqrt{2}$ cm. **B₁:** **2.** a) $\alpha \approx 0,15^\circ$; b) 45° . **3.** $1,65 + 50 \cdot \operatorname{tg} 37,8^\circ = 40,43$ (m).

4. $\approx 32^\circ$. **5.** $2\sqrt{14}$ cm. **C₁:** **6.** $c \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$.

§ 3. Profilurile umanist, arte, sport. A: **1.** $\sqrt{6}$ cm. **B:** **2.** a) $\frac{9}{4}$ cm; b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm. **C:** **3.** 15 cm.

4. 5 cm.

Profilul real. A₁: **1.** $\frac{\sqrt{1221}}{39}$. **B₁:** **2. Indicație.** a) Dacă $O = pr_{(ABC)}E$, iar $[EM]$, $[EN]$, $[EP]$, $[EQ]$ sunt înălțimile triunghiurilor AEB , BEC , CED și respectiv DEA , atunci $OM = ON = OP = OQ$, deci punctul O este egal depărtat de laturile rombului; b) $\triangle MOE \equiv \triangle NOE \equiv \triangle POE \equiv \triangle QOE \Rightarrow \angle EMO \equiv \angle ENO \equiv \angle EPO \equiv \angle EQO$. **3.** Dacă $O = pr_{(ABC)}E$ și $[EM]$, $[EN]$, $[EP]$, $[EQ]$ sunt înălțimile triunghiurilor AEB , BEC , CED și respectiv DEA , atunci $\triangle MOE \equiv \triangle NOE \equiv \triangle POE \equiv \triangle QOE$, deci $MO = NO = PO = QO$. **C₁:** **5.** 30° . **6.** $\sqrt{3}$.

Probleme recapitulative

Profilurile umanist, arte, sport. A: 1. a) 13 cm; b) 30 cm; c) $\sqrt{p^2 + n^2 - m^2}$; d) $\sqrt{2p^2 + n^2 - s^2}$.
2. $\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}$. 3. $d_1 = 2\sqrt{6}$ cm, $d_2 = 4\sqrt{2}$ cm. **B:** 4. a) 30° ; b) $\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$. 5. 2 cm. **C:** 6. 15 m.

Profilul real. A: 3. Indicație. Dreapta din planul α este perpendiculară pe $pr_\alpha a$. 4. 32 cm.
B: 5. $\sqrt{b^2 - a^2}$. 6. $\sqrt{2b^2 - a^2}$. **C:** 8. $\frac{ab}{a+b}$. 9. 0,5 m.

Test sumativ

Profilurile umanist, arte, sport. 1. 3,5 cm. 2. $\sqrt{6}$ cm. 3. $5\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{29}$ cm. 4. 4 cm.

Profilul real. 1. $\frac{1}{2}|a-b|$. 3. $\sqrt{70}$ cm, $2\sqrt{16,06}$ cm. 4. 45° . 5. $AA' \perp a$, $A' \in a$, $A'D \perp d$, $D \in d$; $AD \perp \alpha$.

Modulul 10

§1. Profilul real. A: 2. Nu este. **B:** 3. Este o transformare geometrică, dar nu este o izometrie.
4. Nu întotdeauna (de exemplu, proiectarea paralelă). 8. a) $B'K'$, unde $A'K' = K'C'$; b) $B'L'$, unde $\angle A'B'L' \equiv \angle L'B'C'$ etc. 9. Dacă $C \in [AB]$ și $f(C) = C'$, atunci $AC = AC'$, $CB = C'B$ și $AC + CB = AC' + C'B$, deci $C \equiv C'$. Analog pentru $C \notin [AB]$. 10. a) A se vedea problema 9; b) nu. **C:** 11. a) Da, dacă $f(A) = A$, atunci $f^{-1}(A) = f^{-1}(f(A)) = I(A) = A$. b) da, deoarece $(f \circ f)(A) = f(A) = A$. 12. Da, deoarece $(f \circ f)(A) = f(f(A)) = f(B) = A$.

§2. Profilul real. A: 2. Sunt simetrice. 3. O infinitate și mulțimea lor reprezintă o dreaptă paralelă cu dreptele date. 4. Nu. 5. Nu. **B:** 6. Sunt coliniare. 8. Da (centrul, orice dreaptă, orice plan care trece prin centrul simetriei centrale). 9. Identică. 10. Nu. **C:** 14. a) Un segment paralel cu cel dat; b) o dreaptă paralelă cu cea dată; c) un plan paralel cu cel dat.

§3. Profilul real. A: 1. a) Triunghiul isoscel, dreptunghiul; b) triunghiul cu laturi de lungimi diferite, paralelogramul. **B:** 2. Dreptele care trec prin centrele a două fețe opuse; dreptele care trec prin mijloacele a două muchii paralele ce nu aparțin aceleiași fețe. 4. Orice mediatoare a segmentului AB . Reuniunea este planul mediator al segmentului AB . 5. a) Dreapta suport și orice mediatoare a segmentului; b) dreapta suport a semidrepte; c) însăși dreapta și orice dreaptă perpendiculară pe ea; d) orice dreaptă din plan și orice dreaptă perpendiculară pe plan; e) dreapta care este perpendiculară pe planul paralelogramului și care trece prin punctul de intersecție a diagonalelor lui. 6. a) Imaginea dreptei paralele cu axa este o dreaptă paralelă cu cea dată; imaginea dreptei care intersectează axa este o dreaptă care trece prin punctul de intersecție a dreptei date cu axa și axa este dreapta suport a bisectoarelor unghiurilor opuse la vârf formate de dreaptă și imaginea ei; imaginea dreptei necoerente cu axa este o dreaptă necoerentă cu cea dată. 7. a) Orice dreaptă perpendiculară pe axa de simetrie și însăși axa; b) axa de simetrie.

C: 8. a) $\alpha \equiv \alpha'$ și $d \in \alpha'$; b) $\alpha \equiv \alpha'$ și $d \perp \alpha'$; c) $d \cap \alpha' \neq \emptyset$.

§4. Profilul real. A: 2. Orice dreaptă din plan și orice dreaptă perpendiculară pe plan.

B: 3. a) Orice plan care conține segmentul și planul mediator al segmentului; b) orice plan care conține dreapta și orice plan perpendicular pe dreapta dată; c) însuși planul și orice plan perpendicular pe planul dat; d) planul care conține dreptele date și două plane perpendiculare pe planul

definit de dreptele date și care conțin bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date; e) planul determinat de dreptele date, planul perpendicular pe planul determinat de dreptele date, egal depărtat de la dreptele date și orice plan perpendicular pe dreptele date; f) planul egal depărtat de la planele date și orice plan perpendicular pe planele date. **4.** Sunt coplanare. **6.** 5 m. **C₁:** **8.** $\alpha \parallel \beta$, dacă $\alpha \parallel \gamma$; $\alpha \not\parallel \beta$, dacă $\alpha \not\parallel \gamma$. **9.** Punctul M este punctul de intersecție a dreptei AB' cu planul α , unde B' este simetricul punctului B față de planul α . **10.** Punctul M este punctul de intersecție a dreptei AB' cu planul α , unde B' este simetricul punctului B față de planul α . **11.** Un cerc situat în planul care trece prin punctul A perpendicular pe dreapta d , al cărui centru este punctul de intersecție a dreptei d cu acest plan, iar raza – distanța de la punctul A la dreapta d .

§5. Profilul real. B₁: **5.** Puncte invariante nu există. Orice dreaptă și orice plan paralele cu dreapta determinată de un punct și imaginea lui la această translație. **6.** t_{BA} .

§6. Profilul real. A₁: **2.** Nu este. **3.** Nu. **4.** Un singur punct – centrul omotetiei. Orice dreaptă care trece prin centrul de omotetie. **B₁:** **5.** 9 cutii. **6.** a) Laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt paralele cu laturile triunghiului ABC ; b) a se vedea 6 a). **7.** $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. **C₁:** **9.** a) Un cerc; b) un disc; c) un paralelogram; d) un pătrat; e) un cub; f) o sferă.

§7. Profilul real. A₁: **1.** a) O infinitate de axe; b) o axă; c) o axă sau niciuna; d) nicio axă. **C₁:** **7.** *Indicație.* Considerați rotația în jurul axei l care aplică punctul B pe punctul B' , astfel încât: 1) $B' \in (IA)$; 2) A și B' sunt situate de părți diferite ale dreptei l . Atunci $\{M\} = AB' \cap l$ satisface condiția problemei.

Probleme recapitulative

Profilul real. A₁: **1.** *Indicație.* Dacă O este mijlocul $[AC]$, atunci $S_O(d_1) \cap d_2$ este un vârf al paralelogramului căutat. **2.** *Indicație.* Dacă O este mijlocul $[AC]$, atunci $S_O(d) \cap \mathcal{C}$ este un vârf al paralelogramului. **B₁:** **3.** a) $h = \frac{\pi^2 R \sqrt{2}}{12}$; b) $R = 6,5$ cm; $A'B' = 20,4$ cm. **C₁:** **4.** a) $x = l(\sqrt{2} - 1)$; b) $BD = l\sqrt{2}$, $GD = l = AD \Rightarrow BG = x = l(\sqrt{2} - 1)$ (a se vedea figura.) **5.** Dacă $P_1 = S_{AC}(P)$ și $P_2 = S_{BC}(P)$, atunci $\{X_1\} = AC \cap P_1P_2$ și $\{Y_1\} = BC \cap P_1P_2$. **6.** Punctul de impact este intersecția bordurii cu segmentul ce unește unul dintre aceste puncte cu simetricul celuilalt punct față de această bordură. **7.** Vârful C este intersecția dreptei d și dreptei BA_1 , unde $A_1 = S_d(A)$. **8.** Fie $\bar{a} \parallel d_1$, $\bar{a} \not\parallel d_2$. Dacă $d_3 = t_{\bar{a}}(d_1)$, atunci $\{M_2\} = d_3 \cap d_2$, iar $M_1 = t_{-\bar{a}}(M_2)$. **9.** Fie $B_2 \in d_2$ și $BB_2 \parallel d_1$, $A_2 \in d_1$ și $AA_2 \parallel d_2$, $\bar{a} = \overrightarrow{AA_2}$, $\bar{b} = \overrightarrow{BB_2}$, atunci $t_{\bar{a}+\bar{b}}(A) = A_1$, $t_{\bar{a}+\bar{b}}(B) = B_1$.

Test sumativ

Profilul real. 1. Planele bisectoare ale figurii date și orice plan perpendicular pe dreapta de intersecție a planelor. **2.** Dreapta situată în planele determinate de dreptele date, echidistantă față de acestea. Orice dreaptă din planul determinat de aceste drepte, perpendiculară pe acestea, și orice dreaptă perpendiculară pe planul determinat de aceste drepte, care intersectează prima axă de simetrie. **3.** Fie a și b dreptele necoplanare date. Considerăm dreapta AB perpendiculară comună pe dreptele a și b (aceasta există și este unică), unde $A \in a$, $B \in b$. Fie punctul C mijlocul segmentului AB . Considerăm dreptele a_1, b_1 care trec prin punctul C , paralele cu a și respectiv b . Atunci axele de simetrie ale figurii date sunt dreapta AB și suporturile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele a_1 și b_1 . **5.** a) Da; b) da; c) da; d) în caz general, nu; e) în caz general, nu.

Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i>	3

Modulul 1. Șiruri de numere reale 5

§ 1. Șiruri numerice.	
Recapitulare și completări	5
§ 2. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	13
§ 3. Limita unui șir.	
Șiruri convergente, șiruri divergente	22
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	30
<i>Test sumativ</i>	32

Modulul 2. Limite de funcții 34

§ 1. Limita unei funcții într-un punct	34
§ 2. Operații cu limite de funcții.	
Limitele unor funcții elementare	44
§ 3. Calculul limitelor de funcții	54
§ 4. Cazuri exceptate la operații cu limite	
de funcții	60
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	64
<i>Test sumativ</i>	66

Modulul 3. Funcții continue 68

§ 1. Funcții continue într-un punct.	
Funcții continue pe o mulțime	68
§ 2. Proprietăți ale funcțiilor continue	77
§ 3. Asimptotele funcțiilor	84
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	89
<i>Test sumativ</i>	90

Modulul 4. Funcții derivabile 92

§ 1. Noțiunea de derivată	93
§ 2. Interpretarea geometrică a derivatei	100
§ 3. Derivatele unor funcții elementare	103
§ 4. Operații cu funcții derivabile	108
§ 5. Diferențiala unei funcții	117
§ 6. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile	120
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	130
<i>Test sumativ</i>	132

Modulul 5. Aplicații ale derivatelor 134

§ 1. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	134
§ 2. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor ...	143
§ 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor	148
§ 4. Aplicații ale derivatelor în fizică, geometrie	
și economie. Probleme de maxim și minim	154
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	160
<i>Test sumativ</i>	162

Modulul 6. Numere complexe 164

§ 1. Operații cu numere complexe	
reprezentate sub formă algebrică	164
§ 2. Reprezentarea geometrică a numerelor	
complexe. Forma trigonometrică a unui	
număr complex	170
§ 3. Aplicații ale numerelor complexe	178
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	181
<i>Test sumativ</i>	183

Modulul 7. Matrice. Determinanți.

Sisteme de ecuații liniare 185

§ 1. Matrice	185
§ 2. Determinanți	196
§ 3. Sisteme de ecuații liniare	213
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i>	224
<i>Test sumativ</i>	228

Modulul 8. Paralelismul dreptelor

și planelor 231

§ 1. Axiomele geometriei în spațiu	231
§ 2. Pozițiile relative a două drepte în spațiu	234
§ 3. Drepte și plane	237
§ 4. Plane paralele	240
<i>Probleme recapitulative</i>	244
<i>Test sumativ</i>	247

Modulul 9. Perpendicularitatea

în spațiu 249

§ 1. Drepte și plane perpendiculare	249
§ 2. Proiecții ortogonale. Unghi format	
de o dreaptă și un plan	253
§ 3. Unghi format de două plane	
(unghi diedru)	258
<i>Probleme recapitulative</i>	263
<i>Test sumativ</i>	265

Modulul 10. Transformări geometrice ... 267

§ 1. Noțiunea de transformare geometrică.	
Transformări izometrice	267
§ 2. Simetria centrală	270
§ 3. Simetria axială	272
§ 4. Simetria față de un plan	274
§ 5. Translația	275
§ 6. Transformarea de asemănare. Omotetia	277
§ 7. Rotația în jurul unei drepte (rotația axială)	279
<i>Probleme recapitulative</i>	281
<i>Test sumativ</i>	282
Răspunsuri și indicații	284



MATEMATICĂ



ISBN 978-9975-54-514-3



9 789975 545143

www.edituraprut.md